Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Уральский энергетический институт

Б. И. АНАНЬЕВ
Н. В. ГРЕДАСОВА

МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Б. И. Ананьев, Н. В. Гредасова

МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся по направлению
подготовки 01.03.04 — Прикладная математика

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2019

УДК 336.6:519.6(075.8)
ББК 65.261+22.1я73
А64

Рецензенты:
кафедра «Естественнонаучные дисциплины» УрГУПС
(завкафедрой — д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. А. Тимофеева*);

старш. науч. сотр. ИММ УрО РАН, канд. физ.-мат. наук,
доц. *В. Л. Розенберг*

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *А. Н. Сесекин*

Ананьев, Б. И.
А64 Модели финансовой математики : учебное пособие / Б. И. Ананьев, Н. В. Гредасова. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 108 с.

ISBN 978-5-7996-2637-2

Пособие подготовлено на основании опыта чтения лекций и ведения практических занятий по моделям финансовой математики. Используется подход, основанный на понятиях теории вероятности. Приводятся примеры и упражнения для самостоятельного решения. Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика».
Библиогр.: 11 назв. Рис. 3.

УДК 336.6:519.6(075.8)
ББК 65.261+22.1я73

ISBN 978-5-7996-2637-2

Оглавление

Обозначения

$X \cap Y$, $X \cup Y$ — пересечение и объединение множеств X и Y.
$x \in X \subset Y$ — элемент x подмножества X множества Y.
$A^c = \Omega \setminus A$ — дополнение множества A.
$\bar{X}$, $\operatorname{int} X$ — замыкание и внутренность множества X.
$\partial X = \bar{X} \setminus \operatorname{int} X$ — граница множества X.
$f : X \to Y$ — отображение f множества X в множество Y.
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел; $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел.
$\mathbb{R}^n$ — линейное пространство вектор-столбцов с элементами из $\mathbb{R}$.
$'$ — знак транспонирования.
$x \cdot y = x'y$ — скалярное произведение векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$.
$\|x\|$ — норма вектора x в банаховом пространстве; например, $\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, если $x \in \mathbb{R}^n$.
$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ — отклонение точки x от множества A в банаховом пространстве.
J — промежуток в $\mathbb{R}$, т. е. связное выпуклое множество вида $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ или $(a, b]$, где $a < b$. Если $a \notin J$ и/или $b \notin J$, то допускается, чтобы $a = -\infty$ и/или $b = +\infty$.
$f_{x_i} = \partial f(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_i$ – частная производная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Аналогичное обозначение используется и для вектор-функций f.
Функция f с непрерывными частными производными до второго порядка включительно называется гладкой.
$\exists$; $\forall$ – существует; для всякого.
E — математическое ожидание, D — дисперсия.
$\square$ — конец доказательства.

Предисловие

Предмет «Финансовая математика» возник сравнительно недавно, в последней трети XX века. Математический аппарат предмета составляют понятия теории вероятностей и теории случайных процессов в непрерывном и дискретном времени. Предполагается, что студенты знакомы с основами этих дисциплин. Однако для полноты изложения некоторые необходимые сведения напоминаются в пособии, с доказательствами или без них. Для более полного понимания читателям рекомендуется обращаться к учебникам [1–5].

Главной задачей авторов было изложение достаточно широкого круга вопросов и конкретных моделей, связанных с финансовой математикой, для студентов-математиков. Большинство динамических моделей представляется в дискретном времени. Это связано с тем, что математически корректное изложение моделей с непрерывным временем требует рассмотрения понятий броуновского движения и стохастических дифференциальных уравнений. Это потребовало бы существенного увеличения объёма пособия. Следует отметить, что во многих университетах США и Европы существуют специальности «финансовая математика» и «финансовая инженерия». Как правило, данные специальности принадлежат математическим факультетам. Выпускники специальностей успешно работают в научных учреждениях, банках, страховых и иных финансовых организациях. В России существует Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Москва). При нём имеется два варианта магистратуры по профилю «Финансовая математика и анализ рынков». Основная специальность обучения — «Финансы и кредит». Таким образом, выпускники университета являются скорее экономистами, чем математиками широкого профиля. Математические аспекты теории разрабатывались в России и продолжают разрабатываться А.Н. Ширяевым и его учениками. Монография [6] завоевала широкую известность среди специалистов в мире.

Обычно центральным местом дискретной финансовой теории является динамическая теория *арбитража.* Данная теория выделяет из всей совокупности финансовых рынков « справедливо» устроенные рынки, на которых отсутствуют арбитражные возможности. Основные понятия вначале излагаются на одношаговой модели, а затем обобщаются на многошаговый случай. В науке о финансах особенно важна оценка действующим лицом (инвестором, участником рынка и т. п.) дохода и риска финансовой операции. Следует иметь в виду, что финансы являются лишь частью экономики.

Лидерами экономики являются производители материальных ценностей и услуг: автомобилей, магнитофонов, компьютеров и т. п. Именно в реальном секторе экономики происходит наполнение рынка, финансовая сфера занимается лишь обслуживанием этого сектора. Вместе с тем к настоящему времени в финансовой математике получены изящные, чисто математические результаты, с которыми авторы пособия постараются познакомить. Основное внимание уделяется описанию и обоснованию моделей, а также построению алгоритмов. Построенные алгоритмы чаще всего универсальны и не зависят от языков программирования и конкретных вычислительных систем.

В пособии мы попытались показать некоторые преимущества разработки алгоритмов в конкретной системе MatLab. Самостоятельная работа, решение достаточного количества задач и выполнение лабораторных работ должны научить студентов основным приёмам финансового моделирования и применению соответствующих методик. Авторы старались включить в пособие разнообразные примеры и описания моделей, а также иногда и тексты программ на языке MatLab. Многие главы содержат задачи и упражнения. Материал пособия соответствует программе курса «Модели финансовой математики». Помимо системы MatLab, к настоящему времени имеются хорошо разработанные интегрированные пакеты для ЭВМ типа Mathematica, Maple и др., позволяющие численно и с высокой точностью решать дифференциальные уравнения, проводить оптимизацию и т. д. Однако именно система MatLab завоевала наиболее широкую популярность во многих приложениях благодаря своей универсальности и развитым средствам визуализации. В пособии содержится больше материала, чем можно было бы изложить на лекциях за отведённое время. Некоторые вопросы студенты могут изучить самостоятельно, а также написать по ним курсовую или дипломную работу. Для более углубленного изучения математических методов финансового моделирования и системы MatLab можно рекомендовать книги [6, 7, 10, 11, 13–19]. В них же приведены многочисленные задачи и упражнения.

Материал данного пособия разбит на главы, пронумерованные параграфы и пункты. Внутри параграфа идут утверждения, леммы, теоремы, замечания, примеры и упражнения, относящиеся к данному параграфу.

Опишем кратко содержание пособия по главам. В первой главе напоминаются понятия, связанные со случайными величинами. Во второй главе рассматриваются статические портфели ценных бумаг, понимаемые как конечные наборы неотрицательных случайных величин. Выделяются оптимальные портфели в смысле минимума среднего риска вложения или в смысле максимума среднего дохода при ограничении на риск. Рассматривается учёт неотрицательности долей вложения и зависимость портфеля от ведущего фактора рынка. В третьей главе для одношаговых рынков вводятся фундаментальные понятия арбитража и устанавливается основная теорема о безарбитражности. Даётся геометрическая интерпретация безарбитражности. Попутно приводятся некоторые необходимые сведения из теории меры. В четвертой главе изучаются производные ценные бумаги (функции от случайных активов) и их безарбитражные цены. Здесь же вводится понятие полных рынков. Пятая глава является центральной. Водятся многошаговые модели рынка и портфели на них, именуемые также стратегиями инвестора. Особый интерес представляют самофинансируемые стратегии. Обобщается понятие безарбитражности рынка. Показано, что достаточно абстрактная теория мартингалов находит практическое применение при исследовании финансовых рынков. В параграфе 5.4 изучаются европейские платёжные обязательства, предъявляемые к оплате в конечный момент. В параграфе 5.5 даётся характеризация полных рынков, вероятностное пространство которых по существу конечномерно. В заключение приводятся примеры биномиального и гауссовского рынков, первый из которых полон. В шестой главе изучаются американские платёжные обязательства, которые предъявляются к оплате в произвольный момент. Рассматривается хеджирование таких обязательств с точки зрения как продавца, так и покупателя таких ценных бумаг. В седьмой главе исследуется суперхеджирование, т. е. нахождение такой самофинансируемой стратегии инвестора, которая покрывает все расходы, связанные с продажей американского платёжного обязательства. При этом европейские обязательства являются частным случаем американских. Хотя мы и не рассматриваем подробно непрерывный случай, в восьмой главе всё же даётся описание сходимости дискретной схемы с одним рисковым активом к непрерывному случаю геометрического броуновского движения. При этом цены обязательства сходятся к цене Блэка — Шоулса. Обоснование этого процесса основано на центральной предельной теореме. В параграфе 8.2 мы возвращаемся к биномиальному рынку и рассматриваем некоторые экзотические опционы и их связь со случайным блужданием. В параграфе 8.3 даётся аппроксимация непрерывного барьерного опциона. Девятая глава посвящена описанию некоторых приёмов работы в системе MatLab. В приложении предлагаются примерные темы для курсовых работ.

Глава 1

Случайные величины

1.1. Зависимость между случайными величинами

Пусть случайные величины x, y имеют математические ожидания $m_x = \mathrm{E}x$, $m_y = \mathrm{E}y$ и дисперсии $D_x = \mathrm{E}(x - m_x)^2$, $D_y = \mathrm{E}(y - m_y)^2$. Взаимная ковариация $K_{x,y}$ этих величин определяется как $K_{x,y} = \mathrm{E}(x-m_x)(y-m_y)$. Другие полезные характеристики — это среднеквадратичные отклонения $\sigma_x = \sqrt{D_x}$, $\sigma_y = \sqrt{D_y}$ и коэффициент корреляции или корреляционный момент

$$k_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Поскольку в силу неравенства Коши — Шварца из математического анализа [1, 2] получаем, что $|K_{x,y}| \leqslant \sqrt{D_x}\sqrt{D_y} = \sigma_x\sigma_y$, то $|k_{x,y}| \leqslant 1$. Из того же соотношения Коши — Шварца следует, что равенство $|k_{x,y}| = 1$ эквивалентно линейной зависимости между величинами x, y. Сформулируем эти факты в виде утверждения.

Утверждение 1.1. *Коэффициент корреляции между случайными величинами x, y удовлетворяет неравенству $|k_{x,y}| \leqslant 1$. Равенство $|k_{x,y}| = 1$ возможно тогда и только тогда, когда $x - m_x = a(y - m_y)$, причём $x - m_x \neq 0$, $y - m_y \neq 0$, $a = \mathrm{const}$.*

Если $k_{x,y} = 1$, то говорят, что между величинами x, y имеется *полная прямая корреляция*. Если же $k_{x,y} = -1$, то между величинами имеется *полная обратная корреляция*. В первом случае в утверждении 1.1 число $a = \sigma_x/\sigma_y$, а во втором $a = -\sigma_x/\sigma_y$. Если $K_{x,y} = 0$, то величины x, y *некоррелированы*. Это более слабое свойство, чем *независимость* величин, когда $P(x < a, y < b) = P(x < a)P(y < b)$ для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ [4].

1.2. Линейная однофакторная регрессия

Пусть x, y — случайные величины с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. На практике случайные величины, возникающие в результате многократно проводимого эксперимента, могут быть ненаблюдаемыми. Приблизим ненаблюдаемую величину x с помощью линейной комбинации наблюдаемой y, составив функцию $F(a, b) = \mathrm{E}(x - a - by)^2$ и решив задачу

$$F(a, b) \to \min_{a,b}.$$

Преобразуем $F(a,b) = b^2 D_y - 2bK_{x,y} + D_x + (a - m_x + bm_y)^2$. Приравнивая к нулю частные производные F_b, F_a, получаем:

$$F_b = 2bD_y - 2K_{x,y} + 2(a - m_x + bm_y)m_y = 0, \quad F_a = 2(a - m_x + bm_y) = 0.$$

Отсюда однозначно определяются оптимальные числа $a^* = m_x - bm_y \, b^* = K_{x,y}/D_y$, и

$$\min_{a,b} F(a,b) = D_x - K_{x,y}^2/D_y = \sigma_x^2(1 - k_{x,y}^2).$$

Величина $a^* + b^* y = m_x + K_{x,y}(y - m_y)/D_y$ является наилучшим приближением к x. В случае некоррелированности наилучшим приближением будет математическое ожидание m_x.

На практике совместное распределение величин x, y, как правило, неизвестно. Поэтому всё считают по имеющимся реализациям случайных величин. Пусть $X = [x_1; \ldots; x_N]$, $Y = [y_1; \ldots; y_N]$ — выборки-столбцы объёма N. Средние выборок — это числа $\bar{X} = \sum x_i/N$ и $\bar{Y} = \sum y_i/N$. Взаимная выборочная ковариация определяется как

$$\hat{K}_{X,Y} = (X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})/N = \sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})/N.$$

Здесь и далее используются обозначения из MatLab, где сложение скаляра с вектором означает сложение скаляра с каждым элементом вектора. Число $\hat{K}_{X,X}$ — это выборочная дисперсия $\hat{D}_X$, а $\hat{\sigma}_X = \sqrt{\hat{D}_X}$ — это выборочное среднеквадратичное отклонение. Выборочный коэффициент корреляции определяется так же, как и выше,

$$\hat{k}_{X,Y} = \frac{\hat{K}_{X,Y}}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y}.$$

Для этого коэффициента дословно выполняется утверждение 1.1 с понятными изменениями в обозначениях. Если рассмотреть задачу наилучшего приближения выборки X с помощью линейной комбинации выборки Y, то наилучшим приближением будет величина $\bar{X} + \hat{K}_{X,Y}(Y - \bar{Y})/\hat{D}_Y$. В случае некоррелированности наилучшим приближением будет вектор-столбец $[\bar{X}; \ldots; \bar{X}]$ из средних. В дальнейшем символом $[x_1; \ldots; x_n]$ может также обозначаться произвольный упорядоченный набор произвольных элементов $\{x_i\}$. При этом $\{x_1, \ldots, x_n\}$ означает само множество, т. е. неупорядоченный набор. Для чисел символ $[x_1, \ldots, x_n]$ — это вектор-строка. Для двух элементов, как правило, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ — это сегмент, если не оговорено другое.

Упражнение 1.2. Найти вид функции $F(a,b)$, минимум которой в задаче наилучшего линейного приближения выборки будет равен $\hat{D}_X - \hat{K}_{X,Y}^2/\hat{D}_Y = \hat{\sigma}_X^2(1 - \hat{k}_{X,Y}^2)$.

Упражнение 1.3. Пусть совместное распределение случайных величин x и y имеет плотность $f(x,y) = e^{xy}/(e-1)^2$, сосредоточенную на квадрате $[0,1] \times [0,1]$. Обозначим через $g(x)$ обратную функцию для $e^x/(e-1)$. В MatLab с помощью вычисления $g(\mathrm{rand})$, где rand — равномерное распределение, получить две выборки X и Y объёма $N = 10$ на отрезке $[0,10]$. Рассчитать их средние, взаимную ковариацию и наилучшие линейные оценки X по Y и Y по X. Почему для получения невырожденных оценок нельзя взять выборки просто из распределения rand?

Указание. Проверить, что $f(x,y)$ действительно является плотностью. Показать, что $g(\mathrm{rand})$ имеет распределение $e^x/(e-1)$ на отрезке $[0,1]$.

Пример 1.4. Пусть $X = [9;10;12;5]$, $Y = [6;4;7;3]$. Имеем $\bar{X} = 9$, $\bar{Y} = 5$. Взаимная ковариация $\hat{K}_{X,Y} = 3.25$, дисперсия $\hat{D}_Y = 2.5$, наилучшая линейная оценка X по Y равна $9+3.25(Y-5)/2.5 = 1.3Y+2.5$. Наилучшая линейная оценка Y по X равна $(X+1)/2$.

Для подсчёта средних, дисперсий и ковариаций можно использовать команды MatLab mean(X), cov$(X,Y,1)$.

Глава 2

Портфели ценных бумаг

2.1. Статический портфель ценных бумаг и его характеристики

Пусть некто (человек или фирма) обладает капиталом, который намеревается потратить на покупку ценных бумаг. Примем, что $x_i \in [0,1]$ — доля капитала, идущая на i-ю бумагу; d_i — случайный доход i-й бумаги со средним m_i и дисперсией σ_i^2; $V_{ij} = K_{d_i,d_j}$ — взаимная ковариация доходов i-й и j-й бумаг. Риск i-й бумаги отождествляем со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$.

Статическим портфелем ценных бумаг называется набор указанных выше случайных величин $[d_1; \ldots; d_n]$. Случайный доход портфеля — это величина $d_p = \sum x_i d_i$, $\sum x_i = 1$. Беря усреднение, получаем средний доход или эффективность портфеля $m_p = \mathrm{E} d_p = \sum x_i m_i$. Дисперсия портфеля — это число $V_p = D_{d_p} = \mathrm{E}\Big(\sum x_i(d_i - m_i)\Big)^2 = \sum_{ij} x_i x_j V_{ij}$. Ещё рассматривают риск портфеля, или среднеквадратичное отклонение $\sigma_p = \sqrt{V_p}$. Ясно, что риск портфеля при заданных ковариациях бумаг существенно зависит от долей капитала, выделяемых на покупку.

2.2. Влияние корреляции разных ценных бумаг

Пусть разные бумаги некоррелированы, то есть $V_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда риск $\sigma_p = \sqrt{\sum x_i^2 V_{ii}}$. Предположим ещё, что капитал вложен равными долями, то есть $x_i = 1/n$. Тогда средний доход портфеля или эффективность равны $m_p = \sum m_i/n$, а риск равен $\sigma_p = \sqrt{\sum V_{ii}}/n$. Пусть $\bar{\sigma} = \max \sigma_i$, тогда $\sigma_p \leqslant \bar{\sigma}/\sqrt{n}$. Значит, при указанных условиях риск портфеля стремится к нулю при $n \to \infty$. Это называется *эффектом диверсификации.*

Пример 2.1. Пусть данные ценных бумаг записаны в таблицу.

i	1	2	3	4
m_i	3	5	8	10
σ_i	2	4	6	8

Если портфель составлен из бумаг 1-го и 2-го типов и капитал вкладывается равными долями, то эффективность $m_p = (3+5)/2 = 4$, а риск $\sigma_p = \sqrt{2^2+4^2}/2 = 2.23$. Аналогично для бумаг 1–3 имеем $m_p = (3+5+8)/3 = 5.3$, $\sigma_p = \sqrt{2^2+4^2+6^2}/3 = 2.5$. Для бумаг 1–4 получаем $m_p = (3+5+8+10)/4 = 6.5$, $\sigma_p = \sqrt{2^2+4^2+6^2+8^2}/4 = 2.73$.

Упражнение 2.2. Получить 10 независимых выборок, как в упражнении 1.3, и составить таблицу из m_i и σ_i, $i \in 1:10$. Рассчитать эффективности и риски девяти портфелей, составленных, как в предыдущем примере, из бумаг 1–2, 1–3 и т. д. Нарисовать график изменения величин m_p и σ_p, считая, что капитал вложен равными долями.

2.3. Влияние полной прямой и обратной корреляции

Запишем $V_{ij} = k_{ij}\sigma_i\sigma_j$, где $k_{ij} = k_{d_i,d_j}$. Тогда дисперсия портфеля $V_p = \sum_{ij}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j)\times k_{ij}$. Пусть имеет место случай прямой полной корреляции, то есть $k_{ij} = 1$, и капитал вкладывается равными долями. Имеем $V_p = (\sum \sigma_i x_i)^2 = (\sum \sigma_i)^2/n^2$. Риск портфеля равен $\sigma_p = \sum \sigma_i/n$. Если $\sigma_i \geqslant \underline{\sigma} > 0$, то $\sigma_p \geqslant \underline{\sigma}$ для любого n. Следовательно, в этом случае диверсификация не даёт эффекта и $\sigma_p \not\to 0$ при $n \to \infty$. Описанный случай может иметь место, если ценные бумаги — это акции, цена которых зависит от цены на нефть. Тогда падение цен на нефть влечёт падение эффективности портфеля. Вложение денег в такой портфель нерационально.

Рассмотрим другой крайний случай. Пусть $n = 2$, $k_{12} = -1$. Имеем дисперсию портфеля $V_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$. Положим $x_1 = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$, $x_2 = \sigma_1/(\sigma_1 + \sigma_2)$. Тогда получаем эффективность $m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$ и нулевой риск $\sigma_p = 0$. Такое вложение денег можно считать наилучшим с точки зрения риска.

2.4. Оптимальные портфели Марковица

Модель расчёта оптимальных портфелей была предложена американским экономистом Г. Марковицем в 1952 г. В 1990 г. ему была присвоена Нобелевская премия по экономике. Рассмотрим математические аспекты оптимизации портфелей. Пусть задана средняя эффективность портфеля, то есть

$$\sum x_i m_i = m_p, \quad \sum x_i = 1.$$

Требуется минимизировать риск, а именно решить задачу

$$V_p = \sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j \to \min_{x_i, x_j}$$

при условиях равенства, записанных выше. Здесь не требуем положительности x_i. Если набор $[x_1^*; \ldots; x_n^*]$ доставляет минимум, то условие $x_i^* > 0$ означает, что надо вложить соответствующую долю в бумаги i-го вида. Если же $x_i^* < 0$, то это значит, что надо занять деньги на рынке в количестве достаточном для покупки бумаги i-го вида. Потом эти деньги вместе с доходом от i-й бумаги надо вернуть. Такая операция называется short sale.

Пример 2.3. Пусть $n = 2$. Тогда из условий равенства имеем $x_1m_1 + x_2m_2 = m_p$, $x_1 + x_2 = 1$. При $m_1 > m_2$ система имеет единственное решение: $x_1^* = (m_p - m_2)/(m_1 - m_2)$, $x_2^* = (m_1 - m_p)/(m_1 - m_2)$. Если $m_1 \geqslant m_p \geqslant m_2$, то решение неотрицательно. Если же $m_p > m_1$, то $x_2^* < 0$. Инвестор занимает деньги на рынке и покупает на них бумаги 1-го типа, потому что они более доходны. Возвращает же он сумму и доход от 2-й бумаги и таким образом наращивает свой капитал. Конечно, такие операции не всегда возможны. В этом случае приходится налагать дополнительное условие $x_i \geqslant 0$.

Сформулированную задачу будем называть 1-*й задачей Марковица*. 2-*я задача Марковица* заключается в максимизации:

$$\sum x_i m_i = m_p \to \max_{x_i}$$

при ограничениях

$$\sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j \leqslant V_p, \quad \sum x_i = 1.$$

2.5. Оптимальные портфели Тобина

Оптимизационные задачи Марковица были несколько видоизменены другим американским экономистом Д. Тобиным: он ввёл безрисковые бумаги с постоянной эффективностью m_0. Такими бумагами можно считать активы, обеспеченные государством. Они дают постоянный и неслучайный доход. Правда, этот доход относительно невелик. 1-*я задача Тобина* аналогична 1-й задаче Марковица:

$$V_p = \sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j \to \min_{x_i, x_j}.$$

В этой задаче Тобина ограничения имеют вид:

$$x_0 m_0 + \sum x_i m_i = m_p, \quad x_0 + \sum x_i = 1.$$

Рассмотрим решение задачи подробнее. Удобнее записать её в матричном виде:

$$x \cdot \mathcal{V} x \to \min_x, \quad x_0 m_0 + x \cdot m = m_p, \quad x_0 + x \cdot J = 1, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{V}$ — матрица, составленная из элементов V_{ij}; $m = [m_1; \ldots; m_n]$ — вектор эффективностей ценных бумаг; $x = [x_1; \ldots; x_n]$ — искомый вектор долей капитала; $J = [1; \ldots; 1]$ — вектор, составленный из единиц. Выразив x_0, получим следующую эквивалентную запись задачи:

$$V_p = x \cdot \mathcal{V} x \to \min_x, \quad x \cdot (m - J m_0) = m_p - m_0. \tag{2.2}$$

Для решения составим функцию Лагранжа $L(x) = x \cdot \mathcal{V}x - 2\kappa(x \times \times(m - Jm_0) - m_p + m_0)$. Предполагая невырожденность матрицы $\mathcal{V}$ и приравнивая градиент функции к нулю, приходим к уравнению $L_x = = 2\mathcal{V}x - 2\kappa(m - Jm_0) = 0$. Отсюда единственное оптимальное решение $x^* = \mathcal{V}^{-1}(m - Jm_0)\kappa$. Найдя множитель Лагранжа κ из условия равенства, окончательно получим:

$$x^* = \frac{\mathcal{V}^{-1}(m - Jm_0)(m_p - m_0)}{|m - Jm_0|^2_{\mathcal{V}^{-1}}}, \quad \sigma_p^* = \min \sigma_p = \frac{|m_p - m_0|}{|m - Jm_0|_{\mathcal{V}^{-1}}}, \tag{2.3}$$

где символом $|x|^2_A$ обозначено выражение $x \cdot Ax$ для симметрической и неотрицательно определённой матрицы A. Если матрица $\mathcal{V}$ вырождена, то решение задачи неединственно. Если $m - Jm_0 \in \mathrm{im}\mathcal{V}$, то минимальное по норме решение достигается на элементе x^* вида (2.3), где матрицу $\mathcal{V}^{-1}$ следует заменить на псевдообратную $\mathcal{V}^-$. В MatLab псевдообратная матрица вычисляется с помощью операции pinv($\mathcal{V}$). В общем случае следует воспользоваться операцией $[U, V] = \mathrm{eig}(\mathcal{V})$, которая даёт разложение $\mathcal{V} = UVU'$ с ортогональной матрицей U и диагональной матрицей V.

Замечание 2.4. Из решения 1-й задачи Тобина не следует решение 1-й задачи Марковица, то есть в формулах (2.1), (2.2) нельзя формально положить $m_0 = 0$, поскольку решение (2.3) может не удовлетворять требованию $J \cdot x^* = 1$. Вот простой пример. Пусть $\mathcal{V} = I$, $n = 2$, $m_0 = 1$, $m_p = 2$, $m = [1; 3]$. Тогда $m - Jm_0 = [0; 2]$ и $x^* = [0; 1/2]$, $x_0 = \sigma_p^* = 1/2$. Полагая в формулах (2.3) $m_0 = 0$, получаем $x^* = m/5$ и $J \cdot x^* = 4/5 \neq 1$. В то же время решение 1-й задачи Марковица доставляет вектор $J/2$, для которого $\sigma_p^* = 1/\sqrt{2}$.

Рассмотрим подробнее 2-*ю задачу Тобина*, аналогичную 2-й задаче Марковица. В векторных обозначениях получаем:

$$m_p = m_0 + x \cdot (m - Jm_0) \to \max_x, \quad x \cdot \mathcal{V}x \leqslant \sigma_p^2,$$

где $\sigma_p^2 = V_p$. Ограничение типа неравенства можно заменить равенством, поскольку линейная функция достигает максимума обязательно на границе эллипсоида. Составляем функцию Лагранжа $L(x) = m_0 + x \cdot (m - Jm_0) - (x \times \times \mathcal{V}x - \sigma_p^2)/(2\kappa)$ и приравниваем нулю её градиент $L_x = m - Jm_0 - \mathcal{V}x/\kappa = = 0$. Отсюда $x^* = \mathcal{V}^{-1}(m - Jm_0)\kappa$. Находим множитель Лагранжа $\kappa = = \sigma_p/|m - Jm_0|_{\mathcal{V}^{-1}}$ из условия равенства и окончательно получаем:

$$x^* = \frac{\mathcal{V}^{-1}(m - Jm_0)\sigma_p}{|m - Jm_0|_{\mathcal{V}^{-1}}}, \quad m_p^* = \max m_p = m_0 + \sigma_p|m - Jm_0|_{\mathcal{V}^{-1}}. \tag{2.4}$$

Сравнивая решения (2.4) и (2.3), видим, что они имеют сходную структуру. Более того, $m_p^* - m_0 = \sigma_p^* |m - Jm_0|_{\mathcal{V}^{-1}}$. Опять же, как следует из замечания 2.4, решение 2-й задачи Марковица не вытекает из формул (2.4).

Пример 2.5. Надо сформировать оптимальный портфель заданной эффективности при следующих данных: $m_0 = 2$, $m = [4; 10]$, $\mathcal{V} = [4, 0; 0, 16]$ (матрица 2×2). Требуется также указать диапазон изменения эффективности m_p, в котором не возникает необходимость операции short sale. По формулам (2.3) получаем $\mathcal{V}^{-1}(m - Jm_0) = i/2$, $|m - Jm_0|^2_{\mathcal{V}^{-1}} = 5$. Отсюда $x^* = (m_p - 2)i/10$ и $x_0^* = 1 - (m_p - 2)/5$. Ясно, что при диапазоне $2 \leqslant m_p \leqslant 7$ нет необходимости в операции short sale. Если же инвестор хочет получить эффективность портфеля $m_p > 7$, то ему можно посоветовать провести такую операцию.

Упражнение 2.6. Сформировать оптимальный портфель заданной эффективности m_p, состоящий из двух бумаг — безрисковой с $m_0 = 2$ и рисковой с $m_1 = 10$ и $\sigma_1 = 5$. Найти зависимость эффективности m_p от риска σ_p.

Упражнение 2.7. Найти решение 1-й задачи Тобина в частном случае некоррелированности рисковых бумаг в количестве n штук. Каково поведение риска портфеля при $n \to \infty$. Сравнить решения 1-х задач Тобина и Марковица в случае некоррелированности рисковых бумаг.

Упражнение 2.8. Решить обе задачи Тобина для портфеля, состоящего из безрисковой бумаги с $m_0 = 2$ и двумя рисковыми бумагами с $m = [6; 8]$, $\mathcal{V} = [16, 9; 9; 81]$.

2.6. Учёт неотрицательности долей вложения

В решениях задач Тобина выше не учитывалась неотрицательность долей x_i вложения. Если операции типа short sale невозможны, неотрицательность необходимо учитывать. Пусть $V_p^* = \max V_p$ при ограничениях типа равенства, как в (2.1), и ограничениях типа неравенства $x_i \geqslant 0$, $i \in 0 : n$. Таким образом, число $\sigma_p^* = \sqrt{V_p^*}$ даёт максимально возможный риск портфеля. На отрезке $[0, \sigma_p^*]$ рассмотрим линейную функцию $m_0 + \sigma |m - Jm_0|_{\mathcal{V}^{-1}}$ относительно σ (см. (2.4)). Эта функция даёт максимальное значение эффективности портфеля без учёта неотрицательности долей вложения. При учёте неотрицательности линейная зависимость максимальной эффективности от σ_p переходит в нелинейную.

Пример 2.9. Сформируем случайным образом вектор эффективностей m и матрицу $\mathcal{V}$ для размерности $n = 10$. Зададим m_0 и решим 2-ю задачу Тобина с учётом неотрицательности долей вложения, а также сравним полученное решение с изложенным выше. Программа на языке MatLab может выглядеть следующим образом.

```
function a22
clc,clear all
tic
global V
m0=1;n=10;m=m0+randn(1,n)+5;
V=randn(n)*3;V=(V'+V)/2;
[U L]=eig(V);L=abs(L);
V=U*L*U';J=ones(1,n);
Vv=@(x)-sqrt(x'*V*x);
opt=optimset('Algorithm','interior-point','Display','off');
[X fv]=fmincon(Vv,zeros(n,1),J,1,[],[],zeros(n,1),[],[],opt);
-fv% max risk
d=sqrt((m-J*m0)*inv(V)*(m-J*m0)');
r=0:.2:-fv;
Xx=@(x)-m0-(m-J*m0)*x;
for k=1:length(r)
[X f(k)]=fmincon(Xx,zeros(n,1),J,1,[],[],zeros(n,1),[],...
@(x)Nonlcon(x,r(k)),opt);
end
clf,plot(r,m0+r*d,r,-f),axis tight
toc
function [c,ceq]=Nonlcon(x,u)
global V
c=x'*V*x-u^2;ceq=[];
```

Данная программа корректно работает для версий MatLab, выпущенных начиная с 2011 г. Для более ранних версий требуется небольшая модификация. График одной из реализаций программы показан на рис. 2.1. Для данной реализации программы имеем $\sigma_p^* = 2.76$. На рисунке видно, что нелинейная функция стабилизируется с ростом σ. То же самое происходит и при других реализациях.

2.7. Формирование портфеля с помощью ведущего фактора рынка

Ведущим фактором финансового рынка называется средняя доходность всех бумаг на данном рынке, то есть $f = \sum_{i=1}^{n} d_i/n$, где n достаточно велико. Далее считается, что доходность i-й бумаги связана с ведущим фактором по формуле $d_i = a_i + b_i f + e_i$, где некоррелированная с f случайная величина e_i такова, что $\mathrm{E}e_i = 0$, причём величины e_i и e_j также некоррелированы при $i \neq j$. Здесь a_i, b_i — числа. Обычно числа a_i, b_i рассчиты-

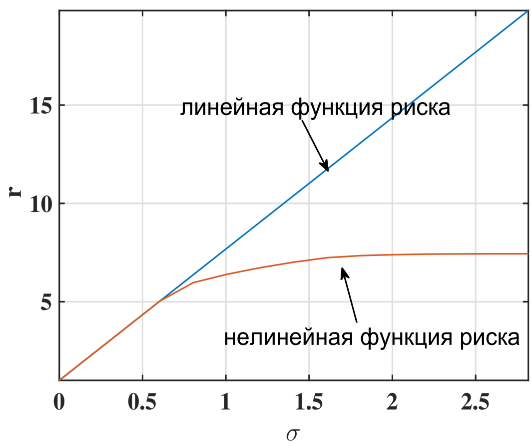

Рис. 2.1. Зависимость максимальной эффективности от риска

ваются путём вычисления линейной однофакторной регресии d_i по f. При этом $e_i = d_i - a_i - b_i f$. Дисперсия доходности равна

$$V_{ii} = b_i^2 V_{ff} + v_{ii},$$

где $b_i^2 V_{ff}$ — *рыночная вариация*, а $v_{ii} = \mathrm{E}e_i^2$ — *собственная вариация* бумаги, не зависящая от рынка. Отношение $b_i^2 V_{ff}/v_{ii} = R_i^2$ называется *R-квадрат* (R-squared). Обычно чем выше величина R-квадрат, тем ценнее бумага. Другой важной характеристикой бумаги служит величина *альфа*, $\alpha_i = a_i + (b_i - 1)m_0$, где m_0 — доходность безрисковой бумаги. Имеем $m_i - m_0 = b_i(m_f - m_0) + \alpha_i$. Говорят, что при $\alpha_i = 0$ бумага справедливо оценена на рынке; при $\alpha_i > 0$ бумага недооценена (надо покупать); при $\alpha_i < 0$ бумага переоценена (от таких лучше избавляться).

Примерами ведущих факторов можно считать: индекс Dow — Jones, вычисляемый по активам 80 ведущих технологических компаний США, индекс Nasdaq, российский индекс РТС и многие другие индексы.

Упражнение 2.10. Как в упражнении 1.3, с помощью функции rand из MatLab получить две выборки d и f объёма $N = 10$. Выборку d взять на отрезке $[0, 10]$, а f — на отрезке $[0, 8]$. Положить $m_0 = 4$. Рассчитать величины a, b, α, v и R^2. Поскольку бумага одна, индексы i здесь опущены.

Указание. Использовать линейную однофакторную регресию. Положить $e = d - a - bf$.

2.8. Оптимальный портфель в зависимости от ведущего фактора

Доходность портфеля, составленного из n ценных бумаг, зависящих от ведущего фактора рынка, имеет вид $m_p = a_p + b_p m_f$, где $a_p = \sum x_i a_i$, $b_p = \sum x_i b_i$. Вариация или дисперсия портфеля записывается в следующем виде:

$$V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = \sum_i x_i^2 v_{ii} + \sum_{i,j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = D_1 + D_2,$$

где $D_1 = \sum_i x_i^2 v_{ii}$ — собственная дисперсия портфеля, а

$$D_2 = \sum_{i,j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = \Big(\sum_i x_i b_i\Big)^2 V_{ff} = b_p^2 V_{ff}$$

— рыночная дисперсия портфеля. Величины $\sigma_{p1} = \sqrt{D_1}$ и $\sigma_{p2} = \sqrt{D_2}$ обозначают собственный риск портфеля и его рыночный риск соответственно. Рыночный риск портфеля $\sigma_{p2} = \sigma_f |b_p|$ линейно зависит от риска ведущего фактора рынка.

Если капитал вкладывается равными долями, то собственная дисперсия $D_1 = \sum v_{ii}\ /n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а значит, и собственный риск стремится к нулю. Однако рыночный риск $\sigma_{p2} = \sigma_f |\sum b_i|/n \geqslant \sigma_f |\min b_i| > 0$. Следовательно, вообще говоря, рыночный риск к нулю не стремится.

Рассмотрим подробно решение 1-й задачи Марковица для рассматриваемого случая. В векторном виде имеем:

$$x \cdot \mathcal{V}x \to \min_x, \quad x \cdot (a + bm_f) = m_p, \quad x \cdot J = 1,$$

где матрица $\mathcal{V} = \sigma_f^2 bb' + \mathrm{diag}(v_{11}, \ldots, v_{nn})$. Эта матрица не вырождена, если $\min v_{ii} > 0$. Составляем функцию Лагранжа $L(x) = x \cdot \mathcal{V}x - 2\kappa(x \times (a + bm_f) - m_p) - 2\lambda(x \cdot J - 1)$ и приравниваем нулю её градиент $L_x = 2\mathcal{V}x - 2\kappa(a + bm_f) - 2\lambda J = 0$. Отсюда $x^* = \mathcal{V}^{-1}((a + bm_f)\kappa + J\lambda)$. Для нахождения множителей Лагранжа имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\kappa|a + bm_f|^2_{\mathcal{V}^{-1}} + \lambda(a + bm_f, J)_{\mathcal{V}^{-1}} = m_p, \quad \kappa(a + bm_f, J)_{\mathcal{V}^{-1}} + \lambda|J|^2_{\mathcal{V}^{-1}} = 1.$$

Определитель матрицы системы равен

$$|a + bm_f|^2_{\mathcal{V}^{-1}} |J|^2_{\mathcal{V}^{-1}} - (a + bm_f, J)^2_{\mathcal{V}^{-1}} > 0.$$

Равенство нулю здесь возможно лишь в крайне редком случае, когда $a + bm_f = \gamma J$ для некоторого числа γ. Поэтому система имеет единственное решение κ, λ. В данном решении безрисковая бумага не учитывается.

При наличии безрисковой бумаги для портфеля можно рассмотреть величину $\alpha_p = a_p + (b_p - 1)m_0$. Она формируется путём умножения соответствующих формул на доли x_i и сложения. В силу формулы $m_p = a_p + b_p m_f$ имеем:

$$m_p - m_0 = b_p(m_f - m_0) + \alpha_p.$$

Так же как для отдельной бумаги, если $\alpha_p = 0$, то портфель считается справедливо оценённым на рынке. Если $\alpha_p > 0$ — портфель недооценён (надо формировать). Если $\alpha_p < 0$ — портфель переоценён (формировать не следует). Линейная функция $m_0 + b(m_f - m_0)$ относительно параметра b называется SML-линией (Security Market Line). Положение величины m_p относительно SML-линии позволяет судить об оценённости портфеля.

Пример 2.11. Портфель составлен из двух бумаг с $b_1 = 1.2$ и $b_2 = -0.8$. Как следует распределять доли, чтобы $b_p = 0$. Это возможно, когда выполняется равенство $x_1 1.2 - x_2 0.8 = 0$. С учётом того, что $x_1 + x_2 = 1$, находим $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.6$.

Упражнение 2.12. Сформировать независимым образом векторы a, b при $n = 10$ из равномерного распределения на $[0, 10]$. В качестве ведущего фактора f взять нормальное распределение со средним $m_f = 5$ и единичной дисперсией. Величины e_i считать нормальными с нулевым средним и дисперсией 0.1. Подобно примеру 2.9 найти максимальное значение V_p для задач Марковица и составить программу на MatLab, позволяющую сравнивать линейную и нелинейную эффективности для 2-й задачи при учёте неотрицательности долей вложения.

Глава 3

Динамические одношаговые портфели. Арбитраж

В настоящей главе предыдущая портфельная теория несколько усложняется. А именно предполагается, что доход ценных бумаг зависит от времени, которое предполагается дискретным. Действительно, в какой-то период времени (например, год) доход бумаги был случаен, но его статистические характеристики были неизменны. В другой период характеристики поменялись в связи, например, с изменением ставки Центрального банка. В соответствии с изменением характеристик бумаг должны меняться и инвестиционные предпочтения потенциального инвестора.

3.1. Одношаговые рынки

Рассматривается рынок ценных бумаг с $n+1$-м активом. Эти активы имеют разные цены в начальный момент $t=0$ и в конечный $t=1$. Цены в начальный момент постоянны и равны $\bar{\pi}=[\pi_0;\ldots;\pi_n]$, $\pi_i \geqslant 0$. Это начальная *система цен*. В момент $t=1$ цены становятся случайными и образуют случайный вектор $\bar{d}=[d_0;\ldots;d_n]$, где $d_i \geqslant 0$ почти наверное (п.н.). В этом векторе присутствует безрисковая облигация d_0. Обычно полагают $\pi_0=1$, $d_0=1+r$, где число $r>-1$. *Портфелем инвестора* называется вектор $\bar{\xi}=[\xi_0;\ldots;\xi_n]\in\mathbb{R}^{n+1}$.

Сумма покупки портфеля составляет $\bar{\xi}\cdot\bar{\pi}=\sum_{i\geqslant 0}\xi_i\pi_i$. В момент $t=1$ портфель будет стоить $\bar{\xi}\cdot\bar{d}$ денежных единиц. Вообще-то, все числовые параметры должны быть неотрицательными, но как и выше, иногда допускается операция short sale, когда при $\xi_i<0$ приобретается заём $\pi_i|\xi_i|$. Он вкладывается в покупку других, более доходных активов, а в момент $t=1$ следует возвратить $d_i|\xi_i|$ единиц тому, у кого заём приобретался. В случае short sale вполне возможна неположительная начальная стоимость $\bar{\xi}\cdot\bar{\pi}\leqslant 0$ портфеля.

Определение 3.1. Портфель $\bar{\xi}\in\mathbb{R}^{n+1}$ является *арбитражной возможностью*, если $\bar{\xi}\cdot\bar{\pi}\leqslant 0$, $\bar{d}\cdot\bar{\xi}\geqslant 0$ п.н. и $P(\bar{d}\cdot\bar{\xi}>0)>0$.

Наличие арбитража на рынке ценных бумаг является отрицательным явлением. Действительно, если арбитражная возможность существует, то из портфеля с нулевой или даже отрицательной стоимостью в момент $t=1$ получается положительный доход с положительной вероятностью. Вряд ли такой исход можно считать справедливым. Если же арбитража нет, то равенство $\pi_i = 0$ влечёт нулевую стоимость актива $d_i = 0$ п.н. В самом деле, если допустить противное, то событие $\{d_i > 0\}$ имеет положительную вероятность. Тогда берём портфель с $\xi_i > 0$ и $\xi_j = 0$ при $j \neq i$. Получаем $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = 0$, $\bar{d} \cdot \bar{\xi} \geqslant 0$ п.н. и $P(\bar{d} \cdot \bar{\xi} > 0) > 0$, что невозможно ввиду отсутствия арбитража. В дальнейшем интересуемся в основном безарбитражными рынками. Поэтому полагаем $\pi_i > 0$ для всех $i \in 0 : n$.

В соответствии с формализмом теории вероятностей будем считать, что все случайные величины заданы на одном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, где $\mathcal{F}$ — σ-алгебра и P — вероятностная мера. В частности, множество Ω может быть счётным.

Замечание 3.2. Пусть Ω не более чем счётно и $P(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда наличие арбитража — это выполнение следующих условий: $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} \leqslant 0$, $\bar{d}(\omega) \cdot \bar{\xi} \geqslant 0$ и $\bar{d}(\omega_0) \cdot \bar{\xi} > 0$ для некоторого $\omega_0 \in \Omega$.

Введём векторы $\xi = [\xi_1; \ldots; \xi_n]$, $\pi = [\pi_1; \ldots; \pi_n]$, $d = [d_1; \ldots; d_n]$.

Лемма 3.3. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *Существует арбитражная возможность.*

б) *Существует вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, такой, что $\xi \cdot d \geqslant (1 + r)\xi \cdot \pi$ п.н. и $P(\xi \cdot d > (1 + r)\xi \cdot \pi) > 0$.*

Доказательство. Если а), то существует арбитраж $\bar{\xi}$, $\xi_0 + \xi \cdot \pi \leqslant 0$, $(1 + r)\xi_0 + d \cdot \xi \geqslant 0$ и $P((1 + r)\xi_0 + d \cdot \xi > 0) > 0$. Поскольку $\xi_0 \leqslant -\xi \cdot \pi$, то неравенства б) будут выполняться с вектором ξ. Пусть выполняется б), тогда, полагая $\xi_0 = -\xi \cdot \pi$, получаем арбитраж с вектором $\bar{\xi} = [\xi_0; \xi]$. □

3.2. Отсутствие арбитража и мартингальная мера

Дадим определение мартингальной меры.

Определение 3.4. Вероятностная мера P^*, заданная на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, называется *мартингальной*, или *риск-нейтральной*, если

$$\mathrm{E}^* \bar{d} = (1 + r)\bar{\pi}, \tag{3.1}$$

где E^* — усреднение по мере P^*.

Напомним некоторые понятия из теории меры [5]. Нам достаточно рассматривать лишь вероятностные меры. Мера μ называется *абсолютно непрерывной* относительно меры ν, если условие $\nu(M) = 0$ влечёт $\mu(M) = 0$ для всех $M \in \mathcal{F}$. Этот факт обозначается как $\mu \ll \nu$. По теореме Радона—Никодима существует неотрицательная измеримая функция (плотность)

$d\mu/d\nu(\omega) = f(\omega)$ такая, что $\mu(M) = \int_M f(\omega)d\nu(\omega)$ для всякого множества $M \in \mathcal{F}$. Если же $\mu \ll \nu$ и $\nu \ll \mu$, то меры называются *эквивалентными*, $\mu \sim \nu$. В случае эквивалентности мер обязательно $d\mu/d\nu > 0$ п.н. по мере ν, и наоборот. Более того, $d\mu/d\nu \cdot d\nu/d\mu = 1$ с вероятностью 1 по обеим мерам.

Обозначим через $\mathcal{M}(P)$ совокупность всех мартингальных мер P^*, для которых $P^* \sim P$. Установим теорему о безарбитражности.

Теорема 3.5. *Арбитражные портфели отсутствуют тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{M}(P) \neq \varnothing$. Более того, в случае непустоты найдётся мера $P^* \in \mathcal{M}(P)$ с ограниченной плотностью dP^*/dP.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(P) \neq \varnothing$, но найдётся портфель с $\bar{\xi}\cdot\bar{\pi} \leqslant 0$, $\bar{\xi} \cdot \bar{d} \geqslant 0$ п.н. и $P(\bar{\xi} \cdot \bar{d} > 0) > 0$. Поскольку интеграл от положительной функции положителен, получаем $\mathrm{E}\bar{\xi}\cdot\bar{d} > 0$. Но в силу эквивалентности мер тогда и $\mathrm{E}^*\bar{\xi} \cdot \bar{d} > 0$. Следовательно, $\mathrm{E}^*\bar{\xi} \cdot \bar{d} = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi}(1+r) > 0$, что противоречит условию $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} \leqslant 0$. Для доказательства обратного введём случайный вектор *дисконтированных чистых прибылей* $Y = d/(1+r) - \pi \in \mathbb{R}^n$. По лемме 3.3 если $\xi \cdot Y \geqslant 0$ п.н., то обязательно $\xi \cdot Y = 0$ п.н. Это необходимое и достаточное условие безарбитражности. Покажем, что безарбитражность влечёт существование вероятностной меры $P^* \sim P$ со свойством $\mathrm{E}^*Y = 0$ и ограниченной плотностью dP^*/dP. Пусть вектор Y интегрируем, т. е. $\mathrm{E}|Y| < \infty$. Рассмотрим множество $\mathcal{Q}$, состоящее из вероятностных мер $Q \sim P$ с ограниченной плотностью dQ/dP. Образуем выпуклое конечномерное множество $\mathcal{C} = \{\mathrm{E}^QY : Q \in \mathcal{Q}\}$. Если $0 \in \mathcal{C}$, то все доказано. Если $0 \notin \mathcal{C}$, то по теореме отделимости выпуклых множеств существует вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\mathrm{E}^Q\xi \cdot Y \geqslant 0$ для любых $Q \in \mathcal{Q}$. Найдётся также мера $Q_0 \in \mathcal{Q}$ со свойством $\mathrm{E}^{Q_0}\xi \cdot Y > 0$.

Покажем теперь, что $\xi \cdot Y \geqslant 0$ п.н. Рассмотрим событие $A = \{\xi \cdot Y < 0\}$ и функцию $\varphi_n = (1 - 1/n)I_A + I_{A^c}/n$, где I_B — характеристическая функция множества $B \in \mathcal{F}$. Имеем $0 < \varphi_n \leqslant 1$ и $\mathrm{E}\varphi_n > 0$ для всех $n \geqslant 1$. Введём вероятностные меры Q_n с плотностью $dQ_n/dP = \varphi_n/\mathrm{E}\varphi_n$. Эти меры из множества $\mathcal{Q}$, поэтому $\mathrm{E}^{Q_n}\xi \cdot Y \geqslant 0$, $\mathrm{E}\xi \cdot Y\varphi_n \geqslant 0$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим $\mathrm{E}\xi \cdot YI_A \geqslant 0$. Отсюда $P(A) = 0$. Ввиду неравенства $\mathrm{E}^{Q_0}\xi \cdot Y > 0$ получаем $\mathrm{E}\xi \cdot Y > 0$, что противоречит безарбитражности. Осталось рассмотреть случай $\mathrm{E}|Y| = \infty$. Возьмём меру $\tilde{P}$ с плотностью $d\tilde{P}/dP = c/(1+|Y|)$, где $c = (\mathrm{E}(1+|Y|)^{-1})^{-1}$. Введённая мера $\tilde{P}$ эквивалентна P и $\tilde{\mathrm{E}}|Y| < \infty$. Теперь можем заменить меру P на $\tilde{P}$ с сохранением свойства безарбитражности. □

Замечание 3.6. Из доказательства видно, что теорема справедлива и без требования интегрируемости неотрицательных активов d_i, $i \in 1:n$, по отношению к исходной мере P.

Упражнение 3.7. Показать, что для всякого выпуклого множества $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, не содержащего нуль, найдётся вектор ξ такой, что $\xi \cdot x \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{C}$. Найдётся также хотя бы один вектор $x_0 \in \mathcal{C}$ со свойством $\xi \cdot x_0 > 0$.

Указание. Вначале рассмотреть случай, когда $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| > 0$. Затем в общем случае $0 \notin \mathcal{C}$ показать, что замыкание $\bar{\mathcal{C}} \neq \mathbb{R}^n$.

Упражнение 3.8. Показать, что для вероятностных мер с условием $\mu \ll \nu$ их эквивалентность $\mu \sim \nu$ возможна тогда и только тогда, когда $\varphi = d\mu/d\nu > 0$ п.н. по мере ν.

Указание. Рассмотреть равенство $\mathrm{E}^{\mu} I_{\{\varphi > 0\}} = \mathrm{E}^{\nu} \varphi I_{\{\varphi > 0\}} = \mathrm{E}^{\nu} I_{\{\varphi \geqslant 0\}} = 1$. Отсюда $\mu(\varphi = 0) = 0$. Далее рассмотреть величину $\mathrm{E}^{\mu} \varphi^{-1}$.

Упражнение 3.9. Пусть P — мера Лебега на борелевской σ-алгебре полуинтервала $[0, 1)$ и $\mathcal{G}$ — σ-алгебра, порождённая конечным набором полуинтервалов $[a_{i-1}, a_i)$, где $0 = a_0 < \cdots < a_n = 1$ — заданное разбиение. Доказать, что любая вероятностная мера μ на $\mathcal{G}$ абсолютно непрерывна относительно P на $\mathcal{G}$. В каких случаях $\mu \sim P$?

Пример 3.10. Пусть множество $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ конечно, $N \geqslant 2$. Полагаем $P(\omega_i) = p_i > 0$ для всех $i \in 1:N$. Рассмотрим единственный актив с начальной ценой $\pi > 0$ и случайной ценой $d \geqslant 0$ в момент $t = 1$. Не ограничивая общности, допустим, что значения $d_i = d(\omega_i)$ упорядочены и различны: $d_1 < \cdots < d_N$. Согласно теореме 3.5 данный рынок не допускает арбитражных возможностей тогда и только тогда, когда

$$(1 + r)\pi \in \{\mathrm{E}^* d : P^* \sim P\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} p_i^* d_i : p_i^* > 0,\ \sum_{i=1}^{N} p_i^* = 1 \right\}.$$

Иначе говоря, надо решить систему

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^* d_i = (1 + r)\pi, \quad \sum_{i=1}^{N} p_i^* = 1.$$

При $N = 2$ решение этой системы существует и единственно тогда и только тогда, когда $d_1 < \pi(1+r) < d_2$. При этом $p_1^* = (d_2 - \pi(1+r))/(d_2 - d_1)$, $p_2^* = (\pi(1 + r) - d_1)/(d_2 - d_1)$. Если решения существуют для $N > 2$, то их бесконечно много.

3.3. Достижимые выплаты и норма прибыли

Рассмотрим конечномерное векторное пространство $\mathcal{V} = \{\bar{\xi} \cdot \bar{d} : \bar{\xi} \in \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ измеримых функций. Это пространство *достижимых выплат*. Далее отсутствие арбитража на рынке обозначается аббревиатурой NA.

Лемма 3.11. *Рассмотрим рынок NA. Пусть достижимая выплата* $V = \bar{\xi} \cdot \bar{d} = \bar{\zeta} \cdot \bar{d}$ *п.н. Тогда* $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} = \bar{\zeta} \cdot \bar{\pi}$.

Доказательство. В силу предположений $(\bar{\xi} - \bar{\zeta}) \cdot \bar{d} = 0$ п.н. по мере $P^* \in \mathcal{M}(P)$. Значит, $\mathrm{E}^*(\bar{\xi} - \bar{\zeta}) \cdot \bar{d} = (\bar{\xi} - \bar{\zeta}) \cdot \bar{\pi}(1 + r) = 0$. $\square$

Имея в виду результат леммы, будем определять *цену достижимой выплаты* $V = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$ символом $\pi(V) = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi}$. Ясно, что $V = 0$ п.н. влечёт $\pi(V) = 0$. Обратно, если $\pi(V) = 0$, то, вообще говоря, $\bar{\xi} \neq 0$. Однако такое свойство нежелательно, так как если найдётся $\xi_i \neq 0$, то $\pi_i = -\sum_{j \neq i} \xi_j \pi_j / \xi_i$ и $d_i = -\sum_{j \neq i} \xi_j d_j / \xi_i$. Тогда актив d_i является линейной комбинацией других активов и может быть удалён из рынка.

Определение 3.12. Рынок (non-reduntant, NR) называется *неизбыточным*, если этот рынок NA и случайные величины $\{d_i,\ i \in 0 : n\}$ линейно независимы, т. е. из равенства $\bar{\xi} \cdot \bar{d} = 0$ п.н. следует, что $\bar{\xi} = 0$.

Замечание 3.13. Пусть $Y = d/(1 + r) - \pi$ является вектором дисконтированных чистых прибылей. Для рынка NR имеем

$$\xi \cdot Y = 0 \text{ п.н. } \Leftrightarrow \ \xi = 0. \tag{3.2}$$

Действительно, пусть рынок NR и выполняется левая часть эквивалентности (3.2). Тогда $\xi \cdot d = \xi \cdot \pi(1 + r)$ п.н. Полагая $\xi_0 = -\pi \cdot \xi$, получаем $\xi_0(1 + r) + \xi \cdot d = 0$, откуда $\xi_0 = 0$ и $\xi = 0$.

Определение 3.14. Рассмотрим достижимую выплату $V \in \mathcal{V}$ на рынке NA. *Нормой прибыли* (return) назовём величину $R(V) = (V - \pi(V))/\pi(V)$, если цена выплаты не равна нулю.

В частности, безрисковая норма прибыли равна $r = (d_0 - \pi_0)/\pi_0$. Если достижимая выплата $V = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k V_k$, где V_k — достижимые выплаты с ненулевой ценой, то $R(V) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k R(V_k)$ с коэффициентами $\beta_k = \alpha_k \pi(V_k) / (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \pi(V_k))$, являющимися долями средств, инвестируемых в актив V_k. В частном случае $V = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$ имеем $R(V) = \sum_{i=0}^{N} \pi_i \xi_i R(d_i) / (\bar{\xi} \cdot \bar{\pi})$, где $R(d_i) = (d_i - \pi_i)/\pi_i$.

Утверждение 3.15. *Рассмотрим рынок NA и достижимую выплату* $V \in \mathcal{V}$ *с ценой* $\pi(V) \neq 0$. *Тогда:*

а) *для любой меры* $P^* \in \mathcal{M}(P)$ *для ожидаемой нормы прибыли справедливо равенство* $\mathrm{E}^* R(V) = r$;

б) *если вероятностная мера* $Q \sim P$ *и* $\mathrm{E}^Q|\bar{d}| < \infty$, *то ожидаемая норма прибыли по этой мере равна* $\mathrm{E}^Q R(V) = r - \mathrm{cov}^Q(dP^*/dQ, R(V))$.

Доказательство. Если $V = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$, то $\mathrm{E}^* V = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi}(1+r) = \pi(V)(1+r)$. С учётом определения нормы прибыли получаем а). Пусть $\varphi^* = dP^*/dQ$. По определению ковариации находим:

$$\mathrm{cov}^Q(\varphi^*, R(V)) = \mathrm{E}^Q(\varphi^* R(V)) - \mathrm{E}^Q\varphi^*\mathrm{E}^Q R(V) = \mathrm{E}^* R(V) - \mathrm{E}^Q R(V).$$

Следовательно, вспоминая а), сразу получаем б). □

3.4. О безарбитражности рынка с бесконечным числом активов

Рассмотрим два банаховых пространства ℓ_∞ и ℓ_1 числовых последовательностей $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ с нормами $\|x\|_\infty = \sup_{i \geqslant 1} |x_i|$ и $\|x\|_1 = \sum_{i \geqslant 1} |x_i|$ соответственно. Будем считать, что активы $d(\omega) \in \ell_\infty$, а портфель $\xi \in \ell_1$. Система первоначальных цен $\pi \in \ell_\infty$. По-прежнему считаем, что $\pi_0 = 1$ и $d_0 = 1 + r$, где $r > -1$. Заметим вначале, что существование меры $P^* \sim P$, и такой, что $\mathrm{E}^* \|d\|_\infty < \infty$, $\mathrm{E}^* d = \pi(1 + r)$, немедленно влечёт отсутствие арбитража.

Действительно, пусть найдётся портфель $\bar{\xi}$ с $\bar{\xi} \cdot \bar{d} \geqslant 0$ п.н. и $\mathrm{E}\bar{\xi} \cdot \bar{d} > 0$. Тогда $0 < \mathrm{E}^* \bar{\xi} \cdot \bar{d} = \sum_{i=0}^\infty \xi_i \mathrm{E}^* d_i = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi}(1 + r)$, что противоречит определению арбитражного портфеля. Перестановка знаков суммирования и интегрирования в неравенстве возможна ввиду включения

$$|\xi_0| + \|d\|_\infty \sum_{i=0}^\infty |\xi_i| \in L_1(P^*)$$

и теоремы о сходимости под знаком интеграла.

Однако отсутствие арбитража уже не влечёт существования мартингальной меры. В самом деле, пусть $\Omega = \mathbb{N}$ с любой вероятностной мерой, для которой $P(i) > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Положим $r = 0$ и $\pi_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Значения активов зададим формулой

$$d_i(j) = \begin{cases} 0, \text{ если } j = i, \\ 2, \text{ если } j = i + 1, \\ 1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Полученный рынок NA. Для доказательства возьмём портфель $\bar{\xi}$ такой, что $\bar{\xi} \cdot \bar{d}(j) \geqslant 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\bar{\xi} \cdot \bar{\pi} \leqslant 0$. Для $j = 1$ получим $0 \leqslant \bar{\xi} \cdot \bar{d}(1) = \xi_0 + \sum_{i \geqslant 2} \xi_i = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi} - \xi_1 \leqslant -\xi_1$. Аналогично, для $j > 1$ получим $0 \leqslant \bar{\xi} \cdot \bar{d}(j) = \xi_0 + 2\xi_{j-1} + \sum_{i \neq j, j-1} \xi_i = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi} + \xi_{j-1} - \xi_j \leqslant \xi_{j-1} - \xi_j$. Следовательно, $0 \geqslant \xi_1 \geqslant \xi_2 \ldots$. Ввиду $\xi \in \ell_1$ последнее неравенство возможно лишь в случае, когда $\xi_i \equiv 0$. Безарбитражность установлена. От противного предположим, что имеется мера $P^* \sim P$ такая, что

$1 = \mathrm{E}^* d_i = 2p^*_{i+1} + \sum_{k \neq i, i+1} p^*_k = 1 + p^*_{i+1} - p^*_i$ для $i > 1$. Тогда $p^*_{i+1} = p^*_i$ для всех $i > 1$, где $p^*_i = P^*(i)$. Получаем противоречие с тем, что P^* — вероятностная мера, эквивалентная P.

3.5. Геометрическая интерпретация безарбитражности

В теореме 3.5 утверждается, что рынок безарбитражен тогда и только тогда, когда

$$0 \in \mathcal{M}_b(Y, P) = \left\{ \mathrm{E}^Q Y : Q \sim P,\ dQ/dP \,\text{ограничена},\ \mathrm{E}^Q |Y| < \infty \right\}.$$

Здесь $Y = d/(1+r) - \pi$ — вектор дисконтированных чистых прибылей. Введём более широкое множество $\mathcal{M}(Y, P) = \left\{ \mathrm{E}^Q Y : Q \sim P,\ \mathrm{E}^Q |Y| < \infty \right\}$ и рассмотрим распределение $\mu = P \circ Y^{-1}$, т. е. вероятностную борелевскую меру на $\mathbb{R}^n$, такую, что $\mu(A) = P(Y \in A)$ для любого борелевского множества A. Если $\int |y| \mu(dy) < \infty$, то вектор $\int y \mu(dy)$ называется *барицентром*, или центром масс распределения μ.

Лемма 3.16. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{M}_b(Y, P) = \mathcal{M}_b(\mu) = \left\{ \int y \nu(dy) : \nu \sim \mu,\ d\nu/d\mu \,\textit{ограничена},\ \int |y| \mu(dy) < \infty \right\},\quad \mathcal{M}(Y, P) = \mathcal{M}(\mu) = \left\{ \int y \nu(dy) : \nu \sim \mu,\ \int |y| \mu(dy) < \infty \right\}.$$

Доказательство. Если $\nu \sim \mu$, то можем определить меру $Q \sim P$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ с плотностью $dQ/dP(\omega) = d\nu/d\mu(Y(\omega))$. Ясно, что $\mathrm{E}^Q Y = \int y \nu(dy)$. Значит, $\mathcal{M}(\mu) \subset \mathcal{M}(Y, P)$ и $\mathcal{M}_b(\mu) \subset \mathcal{M}_b(Y, P)$. Обратно, пусть $\tilde{Q} \sim P$. Тогда распределение $\tilde{\nu} = \tilde{Q} \circ Y^{-1} \sim \mu$. Отсюда имеем $\mathcal{M}(Y, P) \subset \mathcal{M}(\mu)$. Более того, ограниченность плотности $d\tilde{Q}/dP$ влечёт ограниченность плотности $d\tilde{\nu}/d\mu$. Значит, $\mathcal{M}_b(Y, P) \subset \mathcal{M}_b(\mu)$. $\square$

В силу леммы 3.16 далее можем рассматривать произвольное вероятностное распределение μ со свойством $\int |y| \mu(dy) < \infty$. *Носителем* меры μ называют множество $\operatorname{supp} \mu = \bigcap \{ A \subset \mathbb{R}^n : A \,\text{замкнуто},\ \mu(A^c) = 0 \}$. Мы будем рассматривать также *выпуклую оболочку* носителя, т. е. множество $\mathcal{G}(\mu) = \operatorname{conv}(\operatorname{supp} \mu)$. Определение выпуклой оболочки дано, например, в [12].

Пример 3.17. Пусть $n = 1$ и рассматривается мера $\mu = (\delta_a + \delta_b)/2$, где $a < b$ и δ_a — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке a. Тогда $\operatorname{supp} \mu = \{a, b\}$ и $\mathcal{G}(\mu) = [a, b]$. С другой стороны, всякая мера $\nu \sim \mu$ имеет вид $\nu = p\delta_a + (1-p)\delta_b$, где $p \in (0, 1)$. Следовательно, $\mathcal{M}_b(\mu) = \mathcal{M}(\mu) = (a, b)$.

Упражнение 3.18. Пусть $n = 2$ и рассматривается мера

$$\mu = (\delta_a + \delta_b + \delta_c)/3,$$

где a, b, c — векторы с координатами $[0;0]$, $[1;0]$, $[0;1]$ соответственно. Найти носитель, его выпуклую оболочку и множества $\mathcal{M}_b(\mu)$, $\mathcal{M}(\mu)$.

Для характеризации множеств $\mathcal{M}_b(\mu)$, $\mathcal{M}(\mu)$ через $\operatorname{supp}\mu$ напомним понятие *относительной внутренности* $\operatorname{ri} A$ выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Множество A лежит в аффинной оболочке (линейном многообразии):

$$\operatorname{aff} A = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ x_i \in A,\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Топологическая внутренность $\operatorname{int} A$ относительно $\operatorname{aff} A$ и есть относительная внутренность $\operatorname{ri} A$ выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Относительная внутренность выпуклого множества всегда непуста. Замыкание множества связано с относительной внутренностью соотношениями $\operatorname{ri} \bar{A} = \operatorname{ri} A$ и $\overline{\operatorname{ri} A} = \bar{A}$. Геометрическая характеризация множества $\mathcal{M}_b(\mu)$ даётся следующей теоремой.

Теорема 3.19. *Множество всех барицентров эквивалентных мер* $\nu \sim \mu$ *удовлетворяет равенству*

$$\mathcal{M}_b(\mu) = \mathcal{M}(\mu) = \operatorname{ri} \mathcal{G}(\mu).$$

Подробное доказательство теоремы 3.19 приведено в [7, теорема 1.48]. Из этой теоремы получаем важное следствие.

Следствие 3.20. *Пусть* μ *— распределение вектора дисконтированных цен* $d/(1 + r)$. *Рынок безарбитражен тогда и только тогда, когда* $\pi \in \operatorname{ri} \mathcal{G}(\mu)$.

Глава 4

Производные ценные бумаги

Производными ценными бумагами будем называть любые борелевские функции от активов $\bar{d}$.

Пример 4.1. *Форвардный контракт.* Акция продаётся в момент $t = 1$ по цене K, которая определяется в момент $t = 0$. Владелец акции теряет сумму $K - d$, которая переходит агенту, выпустившему акцию, если $d < K$. Владелец выигрывает сумму $d - K$, если $d > K$. Итак, доход владельца акции составляет $C = d - K$.

Пример 4.2. *Опционы.* Это такие ценные бумаги, доход которых в момент $t = 1$ составляет либо $C^{\text{call}} = (d - K)^+ = \begin{cases} d - K, & d > K; \\ 0, & d \leqslant K. \end{cases}$, либо $C^{\text{put}} = (K - d)^+$. В первом случае бумага называется call-опционом, а во втором put-опционом. Число K называется ценой исполнения опциона. Заметим, что $C^{\text{call}} - C^{\text{put}} = d - K$.

Пример 4.3. *Стеллаж.* Доход этой ценной бумаги составляет $C = (\pi(V) - V)^+ + (V - \pi(V))^+ = |V - \pi(V)|$, где достижимая выплата $V = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$.

Пример 4.4. *Контракт «бабочка».* Выплата по этому контракту: $C = (K - |V - \pi(V)|)^+$, где $K > 0$ и $V = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$.

4.1. Безарбитражные цены

Пусть $\bar{d}$ — первичные активы и $C = f(\bar{d})$ — производная ценная бумага.

Определение 4.5. Число $\pi^C \geqslant 0$ называется *безарбитражной ценой* производной бумаги, если при добавлении величин $\pi^C = \pi_{n+1}$ и $C = d_{n+1} \geqslant 0$ к исходному рынку получается рынок со свойством NA.

Множество безарбитражных цен обозначается символом $\Pi(C)$.

Теорема 4.6. *Пусть множество $\mathcal{M}(P)$ непусто. Тогда множество безарбитражных цен непусто и определяется равенством*

$$\Pi(C) = \{\mathrm{E}^* C/(1 + r) : P^* \in \mathcal{M}(P),\, \mathrm{E}^* C < \infty\}\,. \tag{4.1}$$

Доказательство. По теореме 3.5 число π^C является безарбитражной ценой тогда и только тогда, когда существует мера $\hat{P} \in \mathcal{M}(P)$ такая, что $\pi_i = \hat{\mathrm{E}} d_i/(1 + r)$, $i \in 1 : n + 1$. Отсюда получаем включение

$\subset$ в формуле (4.1). Обратно, если $\pi^C = \mathrm{E}^* C/(1+r)$, то P^* — эквивалентная риск-нейтральная мера для расширенного рынка. Равенство 4.1 установлено. Надо ещё установить непустоту $\Pi(C)$. Возьмём меру $\tilde{P} \sim P$, для которой $\tilde{\mathrm{E}}C < \infty$. Например, можно взять меру $\tilde{P}$ с плотностью $d\tilde{P}/dP = c/(1+C)$, где c — нормирующий множитель. Относительно меры $\tilde{P}$ исходный рынок безарбитражен. Из теоремы 3.5 следует существование меры $P^* \in \mathcal{M}(\tilde{P})$ с ограниченной плотностью $dP^*/d\tilde{P}$. Значит, $\mathrm{E}^* C < \infty$ и число $\pi^C = \mathrm{E}^* C/(1+r) \in \Pi(C)$. □

Введём арбитражные границы $\pi_{\inf}(C) = \inf \Pi(C)$ и $\pi_{\sup}(C) = \sup \Pi(C)$.

Теорема 4.7. *Арбитражные границы двойственным образом характеризуются формулами*

$$\pi_{\inf}(C) = \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* C/(1+r) = \max\{m \in [0,\infty) : \exists \xi \in \mathbb{R}^n,\ m + \xi \cdot Y \leqslant \leqslant C/(1+r),\ P\text{-п.н.}\},$$

$$\pi_{\sup}(C) = \sup_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* C/(1+r) = \min\{m \in [0,\infty] : \exists \xi \in \mathbb{R}^n,\ m + \xi \cdot Y \geqslant \geqslant C/(1+r),\ P\text{-п.н.}\},$$

где $Y = d/(1+r) - \pi$.

Доказательство теоремы 4.7 можно прочитать в книге [7, теорема 1.31]. Из этой теоремы следует, что $\pi_{\sup}(C)$ — это наименьшая возможная цена достижимой выплаты $V = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$ с условием $V \geqslant C$ P-п.н. Портфель $\bar{\xi}$ в таком случае называют *суперхеджирующей* стратегией продавца бумаги C. Он старается финансировать такую стратегию из прибыли от продажи бумаги C. С другой стороны, цель покупателя бумаги C заключается в покрытии цены бумаги за счёт продажи портфеля $\bar{\eta}$ со свойством $\bar{\eta} \cdot \bar{d} \leqslant C$ P-п.н. и ценой $\bar{\eta} \cdot \pi \leqslant \pi_{\inf}(C)$.

Производная ценная бумага C называется далее *платёжным обязательством*, если $C \geqslant 0$ P-п.н.

Определение 4.8. Платёжное обязательство C называется *достижимым*, или реплицируемым, если $C = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$ P-п.н. для некоторого портфеля $\bar{\xi}$.

Следствие 4.9 (теоремы 4.7)**.** *Для платёжного обязательства C на NA-рынке справедливы следующие утверждения:*

а) *обязательство C достижимо тогда и только тогда, когда оно имеет единственную безарбитражную цену;*

б) *если обязательство недостижимо, то $\pi_{\inf}(C) < \pi_{\sup}(C)$ и множество $\Pi(C) = (\pi_{\inf}(C), \pi_{\sup}(C))$ является интервалом.*

Доказательство. Если платёжное обязательство $C = \bar{\xi} \cdot \bar{d}$, то беря усреднение по мере $P^* \in \mathcal{M}(P)$ от обеих частей равенства, получим $\mathrm{E}^*C = \bar{\xi} \cdot \bar{\pi}(1+r)$. Следовательно, $\Pi(C) = \{\bar{\xi} \cdot \bar{\pi}\}$. Полностью утверждение а) следует из б). Для доказательства б) заметим, что множество $\Pi(C)$ выпукло ввиду выпуклости $\mathcal{M}(P)$. Значит, $\Pi(C)$ является промежутком замкнутым, полуоткрытым или открытым. Покажем, что концы промежутка не принадлежат $\Pi(C)$. Действительно, из теоремы 4.7 следует существование вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\pi_{\inf}(C) + \xi \cdot Y \leqslant C/(1+r)$. В силу недостижимости C приведённое неравенство является строгим с положительной вероятностью. Отсюда следует, что вектор $[\xi \cdot \pi - \pi_{\inf}(C); -\xi; 1] \in \mathbb{R}^{n+2}$ служит арбитражной возможностью на расширенном рынке, где $\pi_{n+1} = \pi_{\inf}(C)$, $d_{n+1} = C$. Значит, цена $\pi_{\inf}(C)$ не является безарбитражной для C. Аналогичное рассуждение исключает возможность $\pi_{\sup}(C) \in \Pi(C)$. $\square$

Замечание 4.10. В теореме 4.7 множество $\mathcal{M}(P)$ можно заменить множеством $\mathcal{P}$ риск-нейтральных мер, абсолютно непрерывных относительно P. Действительно, имеем следующее включение $\mathcal{M}(P) \subset \mathcal{P}$. С другой стороны, мера $P_\varepsilon = \varepsilon P^* + (1-\varepsilon)\tilde{P} \in \mathcal{M}(P)$ для любых $\varepsilon \in (0,1)$, $P^* \in \mathcal{M}(P)$, $\tilde{P} \in \mathcal{P}$. Следовательно, $\mathrm{E}_\varepsilon C = \varepsilon \mathrm{E}^* C + (1-\varepsilon)\tilde{\mathrm{E}}C$. Теперь в этом равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$.

Замечание 4.11. Рассмотрим любой NA-рынок, и пусть $C^{\mathrm{call}} = (d_i - K)^+$ — некоторый опцион, заключенный на i-й актив. Так как $C^{\mathrm{call}} \leqslant d_i$, то $\mathrm{E}^*C^{\mathrm{call}}\ /(1+r) \leqslant \pi_i$ для всякой меры $P^* \in \mathcal{M}(P)$. Используя неравенство Йенсена $\varphi(\mathrm{E}C) \leqslant \mathrm{E}\varphi(C)$ для выпуклых функций $\varphi(\cdot)$, находим, что

$$\mathrm{E}^*C^{\mathrm{call}}/(1+r) \geqslant (\mathrm{E}^*d_i/(1+r) - K/(1+r))^+ = (\pi_i - K/(1+r))^+.$$

Отсюда следует, что для цены опциона на NA-рынке справедливы неравенства

$$(\pi_i - K/(1+r))^+ \leqslant \pi_{\inf}(C^{\mathrm{call}}) \leqslant \pi_{\sup}(C^{\mathrm{call}}) \leqslant \pi_i. \tag{4.2}$$

Для опциона $C^{\mathrm{put}} = (K - d_i)^+$ границы имеют вид:

$$(K/(1+r) - \pi_i)^+ \leqslant \pi_{\inf}(C^{\mathrm{put}}) \leqslant \pi_{\sup}(C^{\mathrm{put}}) \leqslant K/(1+r). \tag{4.3}$$

Границы (4.2) и (4.3) для опционов универсальны, но есть примеры, где они достигаются или точны.

Пример 4.12. Пусть распределение одного актива d является пуассоновским с параметром 1, т. е. $P(d = k) = 1/e/k!$ для $k \in \mathbb{N}_0$ Положим $r = 0$ и $\pi = 1$. Поскольку $\mathrm{E}d = 1$, то P — риск-нейтральная мера. Рассмотрим меру $\tilde{P} \in \mathcal{M}(P)$ с плотностью $d\tilde{P}/dP = eI_{\{d=1\}}$. Эта мера абсолютно непрерывна относительно P, и в соответствии с замечанием 4.10 получаем $\tilde{\mathrm{E}}(d-K)^+ = (1-K)^+ = \pi_{\inf}((d-K)^+)$. Значит, нижняя граница достигается. Для верхней границы строим функцию

$$g_n(k) = (e - e/n)I_{\{0\}}(k) + (n-1)!eI_{\{n\}}(k),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Мера P_n с плотностью $dP_n/dP = g_n(d)$ даёт равенство $\mathrm{E}_n(d-K)^+ = (1-$ $-K/n)^+$. Переход к пределу при $n \uparrow \infty$ завершает доказательство точности верхней границы в соотношении (4.2). Поскольку $C^{\text{call}} - C^{\text{put}} = d - K$, то $\pi_{\sup}(C^{\text{call}}) = \pi_{\sup}(C^{\text{put}}) + \pi - K/(1+r)$. Значит, для данного примера границы в неравенстве (4.3) также точны.

Упражнение 4.13. Привести пример опционов, для которых границы (4.2) или (4.3) дают грубую оценку безарбитражных цен.

Указание. Рассмотрите распределение одного актива $d \in \{0, 1, 2\}$ с вероятностями $p_1 = p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/2$.

4.2. Модели полного рынка

Полными рынками называются такие NA-рынки, на которых любые платёжные обязательства достижимы.

Как известно, пространства $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $p \in [0, \infty]$, состоят из классов эквивалентных измеримых функций $f(\cdot)$, для которых $\mathrm{E}|f|^p < \infty$. Для $p = 0$ — это просто классы эквивалентных измеримых функций, а для $p = \infty$ — это функции со свойством $\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| < \infty$. Напомним также понятие *атома* пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Множество $A \in \mathcal{F}$ называется атомом, если из $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$, следует либо $P(B) = P(A)$, либо $P(B) = 0$. Пусть $\sigma(d)$ — под-σ-алгебра в $\mathcal{F}$, порождённая набором активов d. Имеют место включения

$$\mathcal{V} = \{\bar{\xi} \cdot \bar{d} : \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}\} \subset L^1(\Omega, \sigma(d), P^*) \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P^*) = L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

для всякой меры $P^* \in \mathcal{M}(P)$. Но для полных рынков приведённые включения становятся равенствами. В частности, размерность пространства $L^0(\Omega,$ $\mathcal{F}, P)$ будет конечна. Это сильное требование. В общем случае нетрудно показать, что $n = \dim L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \in [0, \infty]$, тогда и только тогда, когда существует разбиение пространства Ω на n атомов.

Наша цель — доказать следующую характеризацию полных рынков.

Теорема 4.14. *NA-рынок полон тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{M}(P)$ состоит из одного элемента. В этом случае размерность $dim\, L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \leqslant n+1$.*

Доказательство. Пусть рынок полон, тогда любой индикатор I_A является достижимым платежным обязательством. Из следствия 4.9 вытекает, что соотношение $\mathrm{E}^*(I_A) = P^*(A)$ не зависит от P^*. Значит, множество $\mathcal{M}(P)$ состоит из одного элемента. Обратно, пусть $|\mathcal{M}(P)| = 1$ и C — ограниченное платежное обязательство. Тогда это обязательство имеет единственную безарбитражную цену $\mathrm{E}^*C/(1+r)$, и по следствию 4.9 получаем, что C достижимо. Значит, $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset \mathcal{V}$ и $\dim L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \leqslant \leqslant \dim \mathcal{V} \leqslant n+1$. В этом случае пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ содержит не более $n+1$ атома. Всякая измеримая функция, как и любое платежное обязательство, должна быть постоянной на атомах. Следовательно, любое платежное обязательство ограничено и достижимо. □

4.3. Случай двухточечного вероятностного пространства

Пусть $\Omega = \{0, 1\}$, $p_0, p_1 \in (0, 1)$, $p_0 + p_1 = 1$. Рассмотрим один рисковый актив, который в момент $t = 1$ принимает два значения — b с вероятностью p_1 и a с вероятностью p_0, $b > a \geqslant 0$. Рынок безарбитражен тогда и только тогда, когда

$$\pi(1+r) \in \{\tilde{\mathrm{E}}d : \tilde{P} \sim P\} = \{\tilde{p}b + (1-\tilde{p})a : \tilde{p} \in (0,1)\} = (a, b).$$

Это соотношение в более общем виде представлено в примере 3.10. Рынок также полон, т.к. равенство $\pi(1+r) = p^*b + (1-p^*)a$ однозначно определяет параметр $p^* = (\pi(1+r) - a)/(b-a) \in (0,1)$. Следовательно, рынок полон по теореме 4.14. Покажем полноту непосредственно. Берём платежное обязательство и запишем равенство $C(\omega) = \xi_0(1+r) + \xi d(\omega)$, которое должно выполняться для $\omega \in \Omega$. Значит,

$$\xi = (C(1) - C(0))/(b-a), \quad \xi_0 = (C(0)b - C(1)a)/(b-a)/(1+r).$$

Отсюда получаем единственную безарбитражную цену

$$\pi(C) = \bar{\pi} \cdot \bar{\xi} = (C(1)(\pi(1+r) - a) + C(0)(b - \pi(1+r)))/(1+r)/(b-a).$$

В частности, пусть $C = (d-K)^+$ — call-опцион с ценой исполнения $K \in [a, b]$. Тогда

$$\pi(C) = (b-K)\pi/(b-a) - (b-K)a/(1+r)/(b-a). \tag{4.4}$$

Эта цена не зависит от P и возрастает по r. В отличие от этого усреднение $\mathrm{E}C/(1+r) = p_1(b-K)/(1+r)$ убывает по r и зависит от исходной меры.

Зададим числовые данные. Пусть $\pi = 100$, $b = 120$, $a = 90$, $r = 0$. Нормы прибыли инвестиции в рисковый актив равны $R(d)(1) = 20\%$ и $R(d)(0) = -10\%$. Рассмотрим call-опцион C с ценой исполнения $K = 100$. По формуле (4.4) получим безарбитражную цену $\pi(C) = 20/3$. Норма прибыли $R(C) = (C - \pi(C))/\pi(C)$ по отношению к начальной инвестиции равна либо $R(C)(1) = 200\%$, либо $R(C)(0) = -100\%$. Это даёт существенное увеличение дохода, но также и риска.

Возьмём теперь другое платёжное обязательство $\tilde{C} = (K-d)^+ + d$. Здесь $\pi((K-d)^+) = 20/3$ и, значит, $\pi(\tilde{C}) = 100 + 20/3$ в момент $t = 0$. В момент $t = 1$ имеем либо 120, либо 100. Значит, норма прибыли для $\tilde{C}$ равна $R(\tilde{C})(1) = 12,5\%$ или $R(\tilde{C})(0) = -6,25\%$. Мы видим, что более высокое начальное вложение даёт меньший риск при увеличении среднего дохода по сравнению с рисковым активом.

Глава 5

Динамические многошаговые портфели

В данной главе переходим от одношаговых портфелей и рынков к многошаговым. Более решительный шаг — это сразу перейти к рынкам, формируемым стохастическими дифференциальными уравнениями, однако по причинам, указанным в предисловии, в данном пособии мы этого избегаем.

5.1. Многошаговая модель рынка

Пусть последовательность случайных векторов $\bar{d}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$ с неотрицательными компонентами определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ для дискретных моментов времени $t \in 0 : T$, где $0 : T = \{0, 1, \ldots, T\}$. Здесь и далее нижние индексы t будут означать время, а верхние индексы предназначаются для номера актива. Таким образом, $\bar{d}_t = [d_t^0; \ldots; d_t^n]$. Вместе с тем задана возрастающая последовательность под-σ-алгебр

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}, \tag{5.1}$$

где $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Предполагается, что вектор $\bar{d}_t$ в момент t является $\mathcal{F}_t$-измеримым, т. е. согласованным с последовательностью σ-алгебр (5.1).

Определение 5.1. *Стратегией* инвестора (или портфелем) называется последовательность $\bar{\xi}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in 1 : T$, такая, что вектор $\bar{\xi}_t$ является $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримым. Для $t = 0$ полагаем $\bar{\xi}_0 = 0$.

Координата ξ_t^i стратегии $\bar{\xi}_t$ определяет количество единиц i-го актива в период торговли между моментами времени $t-1$ и t. Таким образом, величина $\xi_t^i d_{t-1}^i$ — это сумма, вложенная в i-й актив в момент $t-1$, а $\xi_t^i d_t^i$ — соответствующее значение в момент t. Полная стоимость $\bar{\xi}_t \cdot \bar{d}_{t-1}$ портфеля $\bar{\xi}_t$ в момент $t-1$ к моменту t становится равной $\bar{\xi}_t \cdot \bar{d}_t$. Стратегия $\bar{\xi}_t$ является предсказуемым случайным процессом в отличие от изменения цен активов $\bar{d}_t$.

Определение 5.2. Стратегия $\bar{\xi}_t$ называется *самофинансируемой*, если

$$\Delta\bar{\xi}_t \cdot \bar{d}_{t-1} = 0, \quad \text{для всех } \ t \in 2 : T. \tag{5.2}$$

Здесь и далее используется обозначение $\Delta\eta_t = \eta_t - \eta_{t-1}$ относительно нижних индексов.

Для самофинансируемого портфеля получаем изменение его стоимости:

$$\Delta(\bar{\xi}_t \cdot \bar{d}_t) = \bar{\xi}_t \cdot \Delta\bar{d}_t, \quad t \in 2:T. \tag{5.3}$$

Суммируя равенства в (5.3), приходим к соотношению:

$$\bar{\xi}_t \cdot \bar{d}_t = \bar{\xi}_1 \cdot \bar{d}_0 + \sum_{s=1}^{t} \bar{\xi}_s \cdot \Delta\bar{d}_s, \quad \text{для} \quad t \in 1:T. \tag{5.4}$$

Нулевой актив d_t^0 будем использовать в качестве дисконтирующего, предполагая, что $d_t^0 > 0$ P-п.н. для всех $t \in 0:T$. Тогда можем определить *дисконтированные* цены $X_t^i = d_t^i/d_t^0$, $i \in 0:n$. Достаточно часто в качестве дисконтирующего актива используется детерминированная величина $d_t^0 = \prod_{i=1}^{t}(1+r_i)$, где $r_i > -1$. Дисконтированная стоимость портфеля задаётся равенствами $V_0 = \bar{\xi}_1 \cdot \bar{X}_0$ и $V_t = \bar{\xi}_t \cdot \bar{X}_t$. *Процесс прибыли* определяется как $G_0 = 0$ и $G_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot \Delta X_s$ для $t \in 1:T$. Используя введённые процессы, можем по-разному характеризовать самофинансируемость.

Утверждение 5.3. *Для стратегии $\bar{\xi}_t$ следующие условия эквивалентны:*

а) *стратегия $\bar{\xi}_t$ самофинансируема;*
б) $\Delta\bar{\xi}_t \cdot \bar{X}_{t-1} = 0$, *для всех* $t \in 2:T$;
в) $V_t = V_0 + G_t = \bar{\xi}_1 \cdot \bar{X}_0 + \sum_{s=1}^{t} \xi_s \cdot \Delta X_s$ *для* $t \in 0:T$.

Доказательство. Для проверки условия б) достаточно поделить соотношение (5.2) на d_{t-1}^0. Для проверки в) рассмотрим разность $\bar{\xi}_i \cdot \bar{X}_i - \bar{\xi}_{i-1} \cdot \bar{X}_{i-1} = \bar{\xi}_i \cdot \Delta\bar{X}_i = \xi_i \cdot \Delta X_i$ для всех $i \in 2:T$. Складывая полученное, приходим к условию в). $\square$

Замечание 5.4. Так как $X_t^0 \equiv 1$, то получаем следующие соотношения для дисконтирующей компоненты на NA-рынке:

$$\Delta\xi_t^0 = -\Delta\xi_t \cdot X_{t-1}, \quad \text{для} \quad t \in 2:T, \quad \xi_1^0 = V_0 - \xi_1 \cdot X_0. \tag{5.5}$$

Из соотношений (5.5) вытекает, что компонента ξ_t^0 полностью определяется начальным вложением V_0 и n-мерными процессами ξ_t, X_t.

5.2. Арбитраж и мартингальные меры

Начнём с определения.

Определение 5.5. Самофинансируемая стратегия (портфель) называется *арбитражной возможностью*, если

$$V_0 \leqslant 0, \quad V_T \geqslant 0 \; P\text{-п.н. и} \quad P(V_T > 0) > 0.$$

Существование арбитражных возможностей указывает на неэффективность рынка. Наша цель — охарактеризовать NA-рынки (без арбитража).

Утверждение 5.6. *На рынке существует арбитраж тогда и только тогда, когда существуют такие* $t \in 1:T$ *и* $\eta \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^n)$, *что*

$$\eta \cdot \Delta X_t \geqslant 0 \ P\text{-п.н. и } P(\eta \cdot \Delta X_t > 0) > 0. \tag{5.6}$$

Доказательство. Условие (5.6) необходимо, т.к. в случае существования арбитражной последовательности $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$ с процессом стоимости V_t можно определить момент $t = \min\left\{k : V_k \geqslant 0 \ P\text{-п.н. и } P(V_k > 0) > 0\right\}$. Тогда $t \leqslant T$ и либо $V_{t-1} = 0$ P-п.н., либо $P(V_{t-1} < 0) > 0$. В первом случае, поскольку $V_t = V_{t-1} + \xi_t \cdot \Delta X_t$, имеем $V_t = \xi_t \cdot \Delta X_t$ P-п.н. Значит, величина $\eta = \xi_t$ удовлетворяет (5.6). Во втором случае определим $\eta = \xi_t I_{\{V_{t-1}<0\}}$. Величина η $\mathcal{F}_{t-1}$-измерима и $\eta \cdot \Delta X_t = \Delta V_t I_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant -V_{t-1} I_{\{V_{t-1}<0\}}$. Отсюда получаем справедливость неравенства (5.6). Докажем достаточность. Для t и η из (5.6) определяем последовательность $\xi_s = \eta$ при $s = t$ и $\xi_s = 0$ в остальных случаях. Положим $V_0 = 0$ и согласно (5.5) определим нулевую компоненту ξ_s^0. Следовательно, стратегия $\bar{\xi}_s = [\xi_s^0; \xi_s]$, где $s \in 1:T$, определяет дисконтированную стоимость $V_T = \eta \cdot \Delta X_t$, реализующую арбитраж. □

Определение 5.7. Пусть заданы фильтрующееся вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, где поток $\mathcal{F}_t$ удовлетворяет включениям (5.1), и адаптированная последовательность $M_t \in \mathbb{R}^n$ случайных векторов, $t \in 0:T$. Эта последовательность называется *мартингалом*, если $\mathrm{E}^P|M_t| < \infty$ для всех t и

$$M_s = \mathrm{E}^P(M_t|\mathcal{F}_s), \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{5.7}$$

Замечание 5.8. Полагая $t = T$ в (5.7), получаем, что конечная последовательность является мартингалом тогда и только тогда, когда $M_t = \mathrm{E}^P(F|\mathcal{F}_t)$ для некоторой величины $F \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R}^n)$. В качестве примера мартингала можно привести *процесс плотностей* $Z_t = d\tilde{P}/dP|_{\mathcal{F}_t}$ для вероятностной меры $\tilde{P} \ll P$. Действительно, абсолютная непрерывность мер сохраняется при переходе к под-σ-алгебре $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, поэтому величина $Z_t = d\tilde{P}/dP|_{\mathcal{F}_t}$ существует при каждом t по теореме Радона—Никодима. С другой стороны, пусть $\varphi = d\tilde{P}/dP|_{\mathcal{F}}$. Тогда $\tilde{P}(A) = \int_A \varphi dP = \int_A \mathrm{E}(\varphi|\mathcal{F}_t) dP$ для всякого события $A \in \mathcal{F}_t$. Значит, $Z_t = \mathrm{E}(\varphi|\mathcal{F}_t)$, что и доказывает мартингальность Z_t.

Определение 5.9. Вероятностная мера Q называется *мартингальной*, если процесс дисконтированных цен X_t является мартингалом относительно меры Q, т.е. $\mathrm{E}^Q(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и $\mathrm{E}^Q|X_t| < \infty$. Множество всех мартингальных мер Q таких, что $Q \sim P$, обозначается через $\mathcal{M}(P)$.

Мартингальную меру можно охарактеризовать с различных сторон.

Теорема 5.10. *Следующие условия эквивалентны.*

а) Q — *мартингальная мера.*

б) *Если* $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$, *где* $t \in 1 : T$, — *самофинансируемая стратегия и* ξ_t *ограничена, то процесс дисконтированной стоимости* V_t *является* Q-*мартингалом.*

в) *Если* $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$, *где* $t \in 1 : T$, — *самофинансируемая стратегия и процесс дисконтированной стоимости* V_t *подчиняется условию* $\mathrm{E}^Q V_T^- < \infty$, *то* V_t *является* Q-*мартингалом. Здесь и далее* $Y^- = -Y \wedge 0$.

г) *Если* $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$, *где* $t \in 1 : T$, — *самофинансируемая стратегия и* $V_T \geqslant 0$ Q-*п.н., то* $\mathrm{E}^Q V_T = V_0$.

Доказательство. Из а) следует б). Пусть V_t — процесс стоимости для самофинансируемой стратегии $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$, где $|\xi_t| \leqslant c$. Тогда

$$|V_t| \leqslant |V_0| + \sum_{i=1}^{t} c(|X_i| + |X_{i-1}|).$$

Поскольку $|X_i| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, то $\mathrm{E}^Q|V_t| < \infty$. Более того, имеем $\mathrm{E}^Q(V_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}^Q(V_{t-1} + \xi_t \cdot \Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = V_{t-1} + \xi_t \cdot \mathrm{E}^Q(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = V_{t-1}$ для всех $t \in 1 : T$. Импликация доказана.

Из б) следует в). Вначале покажем, что

$$\mathrm{E}^Q V_t^- < \infty \;\Rightarrow\; \mathrm{E}^Q(V_t|\mathcal{F}_{t-1}) = V_{t-1}. \tag{5.8}$$

В самом деле, условное ожидание здесь корректно определено. Перейдём к ограниченным $\xi_t^{(a)} = \xi_t I_{\{|\xi_t|\leqslant a\}}$. Тогда, пользуясь условием б), получаем

$$\mathrm{E}^Q(V_t|\mathcal{F}_{t-1}) I_{\{|\xi_t|\leqslant a\}} = \mathrm{E}^Q(V_t I_{\{|\xi_t|\leqslant a\}}|\mathcal{F}_{t-1}) - \mathrm{E}^Q(\xi_t^{(a)} \cdot \Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) =$$
$$= \mathrm{E}^Q(V_t I_{\{|\xi_t|\leqslant a\}} - \xi_t^{(a)} \cdot \Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}^Q(V_{t-1} I_{\{|\xi_t|\leqslant a\}}|\mathcal{F}_{t-1}) = V_{t-1} I_{\{|\xi_t|\leqslant a\}}.$$

Переходя к пределу при $a \uparrow \infty$, приходим к (5.8). Далее, учитывая выпуклость функции $\varphi(Y) = Y^-$ и используя неравенство Йенсена $\varphi(\mathrm{E}(Y|\mathcal{F}_t)) \leqslant \mathrm{E}(\varphi(Y)|\mathcal{F}_t)$ для условных ожиданий, получаем в силу условия $\mathrm{E}^Q V_T^- < \infty$:

$$\mathrm{E}^Q V_{T-1}^- = \mathrm{E}^Q(\mathrm{E}^Q(V_T|\mathcal{F}_{T-1}))^- \leqslant \mathrm{E}^Q \mathrm{E}^Q(V_T^-|\mathcal{F}_{T-1}) = \mathrm{E}^Q V_T^- < \infty.$$

Двигаясь назад по времени и повторяя рассуждение, получаем $\mathrm{E}^Q V_t^- < \infty$ и следствие (5.8) для всех $t \in 1 : T$. В частности, $\mathrm{E}^Q V_1 = V_0$ и, следовательно, $\mathrm{E}^Q V_t = V_0$. Значит, $V_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$. Мартингальность V_t установлена.

Из (в) следует (г). Для любого Q-мартингала M_t справедливо соотношение $M_0 = \mathrm{E}^Q(M_T|\mathcal{F}_0) = \mathrm{E}^Q M_T$, поскольку $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Из (г) следует (а). Действительно, определим процесс ξ_s с $\xi^i_s = I_{\{s\leqslant t\}}$ и $\xi^j_s = 0$, если $j \neq i$. Из замечания 5.4 и утверждения 5.3 следует, что процесс ξ_s дополняется компонентой ξ^0_s до самофинансируемой стратегии с начальным вложением $V_0 = X^i_0$. Тогда $V_T = V_0 + \sum_{s=1}^T \xi_s \cdot \Delta X_t = X^i_t \geqslant 0$. Условие (г) влечёт

$$\mathrm{E}^Q X^i_t = \mathrm{E}^Q V_T = V_0 = X^i_0. \tag{5.9}$$

Следовательно, $X^i_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$. Покажем, что $\mathrm{E}^Q(X^i_t I_A) = \mathrm{E}^Q(X^i_{t-1} I_A)$ для всех множеств $A \in \mathcal{F}_{t-1}$. Для этого определяем n-мерный процесс η_s как $\eta^i_s = I_A I_{\{s<t\}} + I_{A^c} I_{\{s=t\}}$ и $\eta^j_s = 0$, если $j \neq i$. Дополняем процесс η_s компонентой η^0_s до самофинансируемой стратегии с начальным вложением $\tilde{V}_0 = X^i_0$. Тогда процесс стоимости $\tilde{V}_T = \tilde{V}_0 + \sum_{s=1}^T \eta_s \cdot \Delta X_t = X^i_{t-1} I_A + X^i_t I_{A^c} \geqslant 0$. Условие (г) влечёт $X^i_0 = \tilde{V}_0 = \mathrm{E}^Q \tilde{V}_T = \mathrm{E}^Q(X^i_{t-1} I_A) + \mathrm{E}^Q(X^i_t I_{A^c})$. С учётом (5.9) утверждение доказано. Следовательно, утверждение (а) верно. □

Теперь можем рассмотреть динамическую версию теоремы о безарбитражности, связывающую отсутствие арбитражных возможностей с существованием эквивалентных мартингальных мер. Введём множество

$$\mathcal{K}_t = \{\eta \cdot \Delta X_t : \eta \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^n)\}. \tag{5.10}$$

Утверждение 5.6 говорит нам о том, что рынок безарбитражен тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{K}_t \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P) = \{0\} \tag{5.11}$$

для всех t. Пусть $\mathcal{P}_t = \{Q\text{-вероятностная мера: } \mathrm{E}^Q(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0\}$. Кроме того, здесь предполагается, что $\mathrm{E}^Q|X_t| < \infty$, $\mathrm{E}^Q|X_{t-1}| < \infty$. Если мера $Q \in \mathcal{P}_t$ для всех $t \in 1 : T$, то мера Q называется *мартингальной*, или *риск-нейтральной* в соответствии с определением 5.9. В этом случае n-мерный процесс X_t является Q-мартингалом. Для дальнейшего вводим множество $\mathcal{P} = \bigcap_{t=1}^T \mathcal{P}_t$. Если дополнительно требовать $Q \sim P$, то мера Q называется *эквивалентной мартингальной мерой*. Совокупность таких мер образует множество $\mathcal{M}(P)$.

Лемма 5.11. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *выполняется условие* (5.11)*;*
б) $(\mathcal{K}_t - L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)) \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P) = \{0\}$*;*
в) *существует мера* $P^* \in \mathcal{P}_t$ *с ограниченной плотностью* dP^*/dP*;*
г) $\mathcal{P}_t \neq \varnothing$.

Доказательство. Из г) следует а). Если предположить противное, то существует вектор $\xi \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^n)$ такой, что $\xi \cdot \Delta X_t \geqslant$

$\geqslant 0$ и $\xi \cdot \Delta X_t > 0$ на множестве ненулевой меры P. Рассмотрим ограниченные величины $\xi^{(c)} = I_{\{|\xi| \leqslant c\}}\xi$ при достаточно больших c и меру $P^* \in \mathcal{P}_t$. По-прежнему $\xi^{(c)} \cdot \Delta X_t > 0$ на множестве ненулевой меры P. Но $\mathrm{E}^*(\xi^{(c)} \cdot \Delta X_t) = \mathrm{E}^*(\xi^{(c)} \cdot \mathrm{E}^*(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1})) = 0$, что противоречит предположению.

Из б) очевидно следует а). Пусть выполнено а) и пусть $z \in (\mathcal{K}_t - L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)) \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Тогда $z = \xi \cdot \Delta X_t - u \geqslant 0$ для некоторой случайной величины $u \geqslant 0$. Отсюда $\xi \cdot \Delta X_t \geqslant u \geqslant 0$. Значит, $\xi \cdot \Delta X_t = 0$, $u = 0$. Следовательно, $z = 0$. Импликация в)$\Rightarrow$г) очевидна. Осталось доказать б)$\Rightarrow$в). Это достаточно сложно. С деталями можно ознакомиться в [7, теорема 1.54]. Некоторые моменты доказательства изложены ниже в упражнениях и параграфе 6.3. $\square$

С помощью леммы 5.11 можем установить основную теорему.

Теорема 5.12. *Рынок является безарбитражным тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{M}(P) \neq \varnothing$. Более того, в случае непустоты найдётся мера $P^* \in \mathcal{M}(P)$ с ограниченной плотностью dP^*/dP.*

Доказательство. Пусть $P^* \in \mathcal{M}(P)$. Тогда из теоремы 5.10 следует, что процесс стоимости для самофинансируемой стратегии $\bar{\xi}_t = [\xi^0_t; \xi_t]$ с $V_0 \leqslant 0$ и $V_T \geqslant 0$ удовлетворяет условию $\mathrm{E}^* V_T = V_0$, откуда $V_T = 0$ P^*-п.н. В силу эквивалентности мер получаем безарбитражность рынка относительно исходной меры P.

Перейдём к обратному утверждению. Рынок тогда и только тогда безарбитражен, когда соотношение (5.11) имеет место для всех t. Применим лемму 5.11 для каждого t. При $t = T$ получим такую меру $\tilde{P}_T \sim P$ с ограниченной плотностью $d\tilde{P}_T/dP$, что $\tilde{\mathrm{E}}_T(\Delta X_T | \mathcal{F}_{T-1}) = 0$. Пусть уже найдена мера $\tilde{P}_{t+1} \sim P$ с ограниченной плотностью $d\tilde{P}_{t+1}T/dP$ и такая, что

$$\tilde{\mathrm{E}}_{t+1}(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in t+1 : T. \tag{5.12}$$

Теперь заменим меру P в (5.11) на $\tilde{P}_{t+1}$. Равенство останется верным. Применим лемму 5.11 для t и найдём меру $\tilde{P}_t$ с ограниченной $\mathcal{F}_t$-измеримой плотностью $z_t = d\tilde{P}_t/d\tilde{P}_{t+1} > 0$, такую, что $\tilde{\mathrm{E}}_t(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Здесь $z_t > 0$, поскольку меры меры эквиваленты между собой и обе эквивалентны P. Мера $\tilde{P}_t$ эквивалентна P и имеет ограниченную плотность ввиду соотношения $d\tilde{P}_t/dP = d\tilde{P}_t/d\tilde{P}_{t+1} \cdot d\tilde{P}_{t+1}/dP$. Более того, можем воспользоваться соотношением

$$\mathrm{E}^Q(F | \mathcal{F}_0) = \mathrm{E}(F\varphi | \mathcal{F}_0)/\mathrm{E}(\varphi | \mathcal{F}_0), \quad \text{где} \quad Q \ll P \quad \text{и} \quad \varphi = dQ/dP. \tag{5.13}$$

Здесь $\mathcal{F}_0$ — любая под-σ-алгебра $\mathcal{F}$. Чтобы установить соотношение, обозначим $\mathrm{E}(\varphi | \mathcal{F}_0)$ через φ_0. В замечании 5.8 показано, что $dQ/dP|_{\mathcal{F}_0} =$

$= \mathrm{E}(\varphi\,|\mathcal{F}_0) = \varphi_0 > 0$ Q-п.н. Берём любую $\mathcal{F}_0$-измеримую функцию $G_0 \geqslant 0$. Поскольку $P \sim Q$ на $\mathcal{F}_0$ и $dP/dQ|_{\mathcal{F}_0} = 1/\varphi_0$ (см. упражнение 3.8 и рассуждения в параграфе 4.2), то

$$\mathrm{E}^Q(G_0F) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(G_0F\varphi|\mathcal{F}_0)) = \mathrm{E}^Q(\mathrm{E}(G_0F\varphi|\mathcal{F}_0)/\varphi_0).$$

На множестве $\{\varphi_0 = 0\}$ полагаем $G_0 = 0$. В силу того, что функцию G_0 можно переместить из-под условного ожидания, и ввиду её произвольности получаем нужное соотношение (5.13).

Теперь применим его в нашем случае. Для всякого $k \in t+1:T$ имеем

$$\tilde{\mathrm{E}}_t(\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \tilde{\mathrm{E}}_{t+1}(\Delta X_k z_t|\mathcal{F}_{k-1})/\tilde{\mathrm{E}}_{t+1}(z_t|\mathcal{F}_{k-1}) = \tilde{\mathrm{E}}_{t+1}(\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0.$$

Здесь воспользовались тем, что функцию z_t можно переместить из-под условного ожидания в силу её $\mathcal{F}_t$-измеримости. Повторяя рассуждения, получаем меру $\tilde{P}_1 \sim P$ с нужными свойствами. □

Отметим, что свойство безарбитражности не зависит от выбора дисконтирующей последовательности $d_t^0 > 0$, но множество $\mathcal{M}(P)$ от неё зависит. Пусть актив $d_t^1 > 0$ также положителен. Тогда можем ввести новый дисконтированный процесс $\bar{Y}_t = d_t^0\bar{X}_t/d_t^1$, $t \in 0:T$. Введём также множество $\tilde{\mathcal{M}}(P)$ эквивалентных мартингальных мер для $\bar{Y}_t$.

Утверждение 5.13. *Множества $\tilde{\mathcal{M}}(P)$ и $\mathcal{M}(P)$ связаны равенством*

$$\tilde{\mathcal{M}}(P) = \{\tilde{P}^* : d\tilde{P}^*/dP^* = X_T^1/X_0^1 \text{ для некоторой меры } P^* \in \mathcal{M}(P)\}.$$

Доказательство. Рассмотрим процесс X_t^1/X_0^1. Он $\mathcal{F}_t$-измерим и является P^*-мартингалом. В частности, $\mathrm{E}^*(X_T^1/X_0^1) = 1$ и формула

$$d\tilde{P}^*/dP^* = X_T^1/X_0^1$$

определяет вероятностную меру $\tilde{P}^* \sim P$. Согласно (5.13) имеем

$$\tilde{\mathrm{E}}^*(\bar{Y}_T|\mathcal{F}_s) = \mathrm{E}^*(\bar{Y}_T X_T^1|\mathcal{F}_s)/X_s^1 = \mathrm{E}^*(\bar{X}_T|\mathcal{F}_s)/X_s^1 = \bar{Y}_s.$$

Следовательно, $\bar{Y}_t$ — мартингал и множество $\tilde{\mathcal{M}}(P)$ содержит множество в фигурных скобках. Поменяв роли $\bar{X}_t$ и $\bar{Y}_t$, получим равенство множеств. □

Следует отметить, что если X_T^1 не является константой, то

$$\tilde{\mathcal{M}}(P) \cap \mathcal{M}(P) = \varnothing.$$

Действительно, если допустить, что $P^* \in \tilde{\mathcal{M}}(P) \cap \mathcal{M}(P)$, то в силу мартингальности будем иметь $\mathrm{E}^*X_T^1 = X_0^1$ и $\mathrm{E}^*(X_T^1)^2 = (X_0^1)^2$ одновременно. Ввиду неравенства Коши — Буняковского для скалярных произведений в пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ это возможно тогда и только тогда, когда X_T^1 является константой.

5.3. Дополнения и упражнения

Упражнение 5.14. Показать, что в лемме 5.11, не ограничивая общности, можно считать, что $\mathrm{E}|X_t| < \infty$, $\mathrm{E}|X_{t-1}| < \infty$.

Указание. Определить вероятностную меру $\tilde{P}$ так, чтобы $d\tilde{P}/dP = c/(1+|X_t|+|X_{t-1}|)$. Условие (б) леммы 5.11 выполняется относительно меры P тогда и только тогда, когда оно выполняется относительно эквивалентной меры $\tilde{P}$. Далее, если плотность $dP^*/d\tilde{P}$ ограничена, то и плотность dP^*/dP тоже ограничена.

Считаем, что условие упражнения 5.14 выполнено. При доказательстве импликации (б)⇒(в) в лемме 5.11 надо найти такую случайную величину $z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, чтобы соотношение $dP^*/dP = z/\mathrm{E}z$ определяло эквивалентную меру $P^* \in \mathcal{P}_t$. Введём выпуклый конус

$$\mathcal{C}_t = (\mathcal{K}_t - L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)) \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P).$$

Лемма 5.15. *Пусть для числа $c > 0$ и величины $z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ выполняется неравенство $\mathrm{E}(zw) \leqslant c$, $\forall\, w \in \mathcal{C}_t$. Тогда*

а) $\mathrm{E}(zw) \leqslant 0$, *т. е. можно положить $c = 0$;*

б) $z \geqslant 0$ *P-п.н.;*

в) *если $z \not\equiv 0$, то $dQ/dP = z/\mathrm{E}z$ определяет риск-нейтральную меру $Q \ll P$.*

Доказательство. Для доказательства а) достаточно заметить, что неравенство $\mathrm{E}(zw) > 0$ для некоторого $w \in \mathcal{C}_t$ сразу влечёт $\sup_{w\in\mathcal{C}_t} \mathrm{E}(zw) = \infty$, поскольку $\mathcal{C}_t$ — конус. Далее, заметим, что функция $w = -I_{\{z<0\}} \in \mathcal{C}_t$. Тогда из а) следует, что $\mathrm{E}(zw) = \mathrm{E}z^- \leqslant 0$. Значит, б) выполнено. Докажем в). Для всех $\xi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^n)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $\alpha\xi \cdot \Delta X_t \in \mathcal{C}_t$ ввиду предположения об интегрируемости из упражнения 5.14. Значит, $\mathrm{E}(z\xi \times \Delta X_t) = 0$. Более того, $\mathrm{E}(\xi \cdot \mathrm{E}(z\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1})) = 0$. Отсюда $\mathrm{E}(z\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ ввиду произвольности ξ. Применим соотношение (5.13) и получим

$$\mathrm{E}^Q(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}(z\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1})/\mathrm{E}(z|\mathcal{F}_{t-1}) = 0\ Q\text{-п.н.}$$

Утверждение в) установлено. □

Для построения риск-нейтральной меры надо описать элементы множества

$$\mathcal{Z}_t = \{z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P) : 0 \leqslant z \leqslant 1,\ P(z > 0) > 0,\ \mathrm{E}(zw) \leqslant 0,\ \forall\, w \in \mathcal{C}_t\}.$$

Упражнение 5.16. Предположим, что конус $\mathcal{C}_t$ замкнут в $L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ и $\mathcal{C}_t \cap L^1_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P) = \{0\}$. Тогда требуется доказать, что для всякого элемента $F \in L^1_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, не равного нулю, существует $z \in \mathcal{Z}_t$ такой, что $\mathrm{E}(zF) > 0$.

Указание. Воспользоваться теоремой Хана — Банаха: если некоторый элемент $x \in B$ банахова пространства не принадлежит выпуклому и замкнутому множеству $\mathcal{C}$, то существует функционал $l \in B^*$ такой, что $\sup_{w\in\mathcal{C}} l(w) < l(x)$. В нашем случае $l(F) = \mathrm{E}(zF)$ для всех элементов $F \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Можем считать, что $\|z\|_\infty \leqslant 1$. По построению z подчиняется условиям леммы 5.15.

Упражнение 5.17. В условиях упражнения 5.16 существует элемент $z^* \in \mathcal{Z}_t$, такой, что $z^* > 0$ P-п.н.

Указание. Вначале доказать счётную выпуклость $\mathcal{Z}_t$. Она следует из того, что элемент $z = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k z^{(k)}$ удовлетворяет соотношениям $\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k z^{(k)} w| \leqslant |w| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ для всякого $w \in \mathcal{C}_t$ и $\mathrm{E}(zw) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \mathrm{E}(z^{(k)} w) \leqslant 0$. Затем надо определить число $c = \sup\{P(z > 0) : z \in \mathcal{Z}_t\}$. Выбирая последовательность $z^{(n)} \in \mathcal{Z}_t$ такую, что $P(z^{(n)} > 0) \to c$, строим элемент $z^* = \sum_{n=1}^\infty z^{(n)}/2^n \in \mathcal{Z}_t$. Равенство множеств $\{z^* > 0\} = \cup_{n=1}^\infty \{z^{(n)} > 0\}$ даёт равенство $P(z^* > 0) = c$. Здесь $c = 1$, в противном случае $P(z^* = 0) > 0$. Элемент $w = I_{\{z^*=0\}} \in L^1_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Согласно упражнению 5.16 найдём $z \in \mathcal{Z}_t$ так, что $\mathrm{E}(zw) > 0$, откуда $P(\{z > 0\} \cap \{z^* = 0\}) > 0$. Теперь множество $\{(z + z^*)/2 > 0\} = \{z^* > 0\} \cup (\{z > 0\} \cap \{z^* = 0\})$. Здесь левое множество представлено в виде суммы непересекающихся множеств с положительной мерой. Но это невозможно, т.к. тогда $P((z + z^*)/2 > 0) > c$, что противоречит построению максимального элемента z^*.

Итак, для установления импликации (б)⇒(в) в лемме 5.11 достаточно установить замкнутость конуса $\mathcal{C}_t$. Это сделано в леммах 1.67, 1.68 в [7]. При этом оказывается, что множества в (5.11) и в утверждении (б) леммы 5.11 замкнуты в топологии пространства $L^0(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ со сходимостью по вероятности.

Приведём несколько упражнений на свойства мартингалов.

Упражнение 5.18. Пусть задан скалярный мартингал $M_t = \sum_{k=1}^t \xi_k$, где независимые величины ξ_k принимают только два значения -1 и 1 с равной вероятностью. Мартингал рассматривается относительно естественного потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_t)$ для счётного множества индексов $t \in \mathbb{N}$. Показать, что не существует величины M^* такой, что $M_t = \mathrm{E}(M^* | \mathcal{F}_t)$ для всех $t \in \mathbb{N}$. Сравнить этот вывод с замечанием 5.8.

Указание. Воспользоваться результатом [8, теорема 2.7] о сходимости мартингалов.

Упражнение 5.19. Рассмотреть ту же последовательность M_t, что и в предыдущем примере, но с условиями $P(\xi_k = 1) = p$, $P(\xi_k = -1) =$

$= 1 - p = q$, $p \neq q$. Показать, что последовательности $\tilde{M}_t = M_t - t(p-q)$ и $\eta_t = \lambda^{M_t}$, где $\lambda = p/q$, являются мартингалами.

Определение 5.20. Целочисленная случайная величина $\tau \in \mathbb{N}$ называется *моментом остановки* относительно возрастающего потока под-σ-алгебр $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$, если индикаторные величины $I_{\{\tau=k\}}$ являются $\mathcal{F}_k$-измеримыми для всех k.

Точно так же определяется момент остановки относительно потока с индексами из $\mathbb{N}_0$. Примером момента остановки (с бесконечными значениями) может служить момент *первого достижения* измеримого множества A некоторой адаптированной последовательностью ξ_k. Этот момент задаётся как $\sigma^A = \min\{k \in \mathbb{N} : \xi_k \in A\}$. Если множество в фигурных скобках пусто, то полагают $\sigma^A = \infty$. В общем случае моменты остановки с бесконечными значениями называют *марковскими моментами*. Для всякого марковского момента τ определяется *остановленная случайная величина* $M_\tau = \sum_{t=1}^{\infty} M_t I_{\{\tau=t\}}$. Имеем $M_\tau = 0$ на множестве $\{\tau = \infty\}$.

Упражнение 5.21. Показать, что остановленная случайная величина M_τ — п.н.-конечная случайная величина. Более того, если M_t — мартингал и существует интегрируемая случайная величина M^* такая, что $M_t = \mathrm{E}(M^*|\mathcal{F}_t)$ для всех $t \in \mathbb{N}$, то $\mathrm{E}(M_\tau|\mathcal{F}_1) = M_1$. В частности, это верно для любых конечных мартингалов.

Указание. Проверить цепочку равенств

$$\mathrm{E}(M_\tau|\mathcal{F}_1) = \mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{\infty} M_t I_{\{\tau=t\}}|\mathcal{F}_1\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}(M^* I_{\{\tau=t\}}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_1\right) =$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}(M^* I_{\{\tau=t\}}|\mathcal{F}_1) = M_1.$$

Кроме остановленной случайной величины M_τ для мартингала M_t можно определить «остановленный» процесс $M_t^\tau = M_{t\wedge\tau}$, где $t \wedge \tau = \min\{t, \tau\}$.

Упражнение 5.22. Доказать, что для всяких марковского момента τ и мартингала M_t последовательность M_t^τ также является мартингалом.

Указание. Равенство $M_t^\tau = \sum_{k=1}^{t} M_k I_{\{\tau=k\}} + M_t I_{\{\tau>t\}}$ устанавливает $\mathcal{F}_t$-измеримость величины M_t^τ. Далее, $\mathrm{E}(M_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t) = \sum_{k=1}^{t} M_k I_{\{\tau=k\}} + \mathrm{E}(M_{t+1} \times$ $\times I_{\{\tau>t+1\}} + M_{t+1} I_{\{\tau=t+1\}}|\ F_t) = M_t^\tau$.

Упражнение 5.23. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — интегрируемые случайные величины такие, что

$$\mathrm{E}(\xi_{t+1} \mid \xi_1, \ldots, \xi_t) = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_t}{t} = M_t.$$

Доказать, что последовательность $M_1, M_2, \ldots$ образует мартингал.

Упражнение 5.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых стандартных гауссовских величин ($\xi_t \sim N(0,1)$), $S_t = \xi_1 + \ldots + \xi_t$, $t \geqslant 1$. Доказать, что последовательность

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \exp\left(\frac{S_t^2}{2(t+1)}\right)$$

есть мартингал относительно потока $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_t)$.

5.4. Европейские платёжные обязательства

Выделяют европейские и американские платежные обязательства.

Определение 5.25. Случайная величина $C \geqslant 0$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется *европейским платёжным обязательством*. Такое обязательство называется *производной ценной бумагой*, оно измеримо относительно σ-алгебры $\sigma(\bar{d}_0, \ldots, \bar{d}_T)$.

Владелец обязательства в момент T его погашения получает случайную выплату $C(\omega)$. Американские платёжные обязательства составляют другой класс и будут рассмотрены позже.

Пример 5.26. Подобно одношаговым рынкам (см. пример 4.2) рассматриваются *опционы на покупку и продажу*

$$C^{\text{call}} = (d_T^i - K)^+, \quad C^{\text{put}} = (K - d_T^i)^+,$$

согласно которым их обладатели имеют право, но не обязательство, купить (продать) актив в момент T по фиксированной цене K.

Пример 5.27. Помимо указанных в предыдущем примере европейских опционов, рассматриваются азиатские опционы с равномерным усреднением:

$$C_{\text{av}}^{\text{call}} = (d_{av}^i - K)^+, \quad C_{\text{av}}^{\text{put}} = (K - d_{av}^i)^+,$$

где $d_{av}^i = \sum_{t \in \mathbb{T}} d_t^i / |\mathbb{T}|$ и $\mathbb{T} \subset 0 : T$. В опционах в качестве цены исполнения K может также использоваться равномерное усреднение:

$$C^{\text{call}} = (d_T^i - d_{av}^i)^+, \quad C^{\text{put}} = (d_{av}^i - d_T^i)^+.$$

Пример 5.28. Рассматриваются также *барьерные опционы*. Один из них — это верхний колл-опцион выхода, который имеет вид:

$$C^{\text{call}}_{\text{u\&o}} = \begin{cases} (d^i_T - K)^+, & \text{если } \max\limits_{t\in 0:T} d^i_t < B, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другой опцион — это нижний пут-опцион входа:

$$C^{\text{put}}_{\text{d\&i}} = \begin{cases} (K - d^i_T)^+, & \text{если } \min\limits_{t\in 0:T} d^i_t \leqslant B, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $B < d^i_0$.

Далее предполагаем, что рынок безарбитражен в смысле определения 5.9, т. е. $\mathcal{M}(P) \neq \varnothing$.

Определение 5.29. Платёжное обязательство C называется *достижимым*, или *реплицируемым* (сравнить с определением 4.8), если существует самофинансируемая стратегия ξ_t такая, что $C = \bar{\xi}_T \cdot \bar{d}_T$ P-п.н.

Платёжное обязательство $C \geqslant 0$ достижимо тогда и только тогда, когда для дисконтированного обязательства $H = C/d^0_T$ справедливо равенство $H = \bar{\xi}_T \cdot \bar{X}_T = V_T = V_0 + \sum_{t=1}^T \xi_t \cdot \Delta X_t$, где $\bar{\xi}_t = [\xi^0_t; \xi_t]$ — самофинансируемая стратегия. Дисконтированное достижимое обязательство обладает свойством, указанным в следующей теореме.

Теорема 5.30. *Любое дисконтированное достижимое обязательство H интегрируемо относительно любой меры $P^* \in \mathcal{M}(P)$, т. е. $\mathrm{E}^*H < \infty$. Более того, процесс стоимости удовлетворяет соотношению $V_t = \mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_t)$ для $t \in 0 : T$. В частности, процесс V_t — неотрицательный P^*-мартингал.*

Доказательство. Это следует из того, что $V_T = H \geqslant 0$, а также теоремы 5.10. □

Замечание 5.31. Из теоремы 5.30 следует, что все реплицирующие стратегии имеют одинаковый процесс стоимости. Кроме того, V_t — версия условного ожидания для любой меры $P^* \in \mathcal{M}(P)$. В частности, E^*H не зависит от P^*.

Определение 5.32. Число $\pi^H \geqslant 0$ называется *безарбитражной ценой* дисконтированного обязательства H (сравнить с определением 4.5), если существует скалярный процесс X^{n+1}_t такой, что

$$X^{n+1}_0 = \pi^H, \quad X^{n+1}_t \geqslant 0 \ \text{ для } t \in 1 : T-1, \quad X^{n+1}_T = H, \tag{5.14}$$

и расширенный рынок с процессом цен $[X_t^0; \ldots ; X_t^{n+1}]$ является NA. Множество безарбитражных цен обозначим $\Pi(H)$. Введём также верхнюю и нижнюю грани множества $\Pi(H)$: $\pi_{\inf}(H) = \inf \Pi(H)$,$\pi_{\sup}(H) = \sup \Pi(H)$.

Теорема 5.33. *Множество безарбитражных цен непусто и задаётся формулой*

$$\Pi(H) = \{\mathrm{E}^* H : \mathcal{P}^* \in \mathcal{M}(P),\ \mathrm{E}^* H < \infty\}. \tag{5.15}$$

Кроме того, $\pi_{\inf}(H) = \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^*(H)$ *и* $\pi_{\sup}(H) = \sup_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^*(H)$.

Доказательство. Из теоремы 5.12 следует, что для безарбитражной цены π^H найдётся эквивалентная мартингальная мера $\hat{P}$ для расширенного рынка. Мера $\hat{P}$ такова, что $X_t^i = \hat{\mathrm{E}}(X_T^i | \mathcal{F}_t)$ для $t \in 0 : T$ и $i \in 1 : n + 1$. В частности, $\pi^H = \hat{\mathrm{E}} H$. Значит, включение $\subset$ в (5.15) доказано.

С другой стороны, если $\pi^H = \mathrm{E}^* H$ для меры $P^* \in \mathcal{M}(P)$, то можно определить случайный процесс $X_t^{n+1} = \mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_t)$ для всех $t \in 0 : T$. Этот процесс удовлетворяет требованиям (5.14). Расширенный рынок будет безарбитражным. Итак, равенство (5.15) установлено.

Множество $\Pi(H) \neq \varnothing$, т.к. вначале можем найти меру $\tilde{P} \sim P$ такую, что $\tilde{\mathrm{E}} H < \infty$. Для этого берём плотность $d\tilde{P}/dP = c/(1 + H)$ с нормирующей постоянной c. Относительно меры $\tilde{P}$ рынок безарбитражен. По теореме 5.12 найдём меру P^* с ограниченной плотностью $dP^*/d\tilde{P}$. Значит, $\mathrm{E}^* H < \infty$ и $\mathrm{E}^* H \in \Pi(H)$.

Формула для $\pi_{\inf}(H)$ сразу следует из (5.15). Для $\pi_{\sup}(H)$ требуются дополнительные рассуждения. Пусть $P^\infty \in \mathcal{M}(P)$ такова, что $\mathrm{E}^\infty H = \infty$. Покажем, что для любого числа $c > 0$ существует $\pi \in \Pi(H)$ такое, что $\pi > c$. Для этого найдём n такое, что $\mathrm{E}^\infty(H \wedge n) = \tilde{\pi} > c$. Определяем процесс $X_t^{n+1} = \mathrm{E}^\infty(H \wedge n|\mathcal{F}_t)$. Тогда P^∞ — эквивалентная мартингальная мера для расширенного рынка X_t^{n+1}. Т.к. множество безарбитражных цен непусто, получим такую мартингальную меру P^* для расширенного рынка, что $\pi = \mathrm{E}^* H < \infty$. Значит, $\pi = \mathrm{E}^* H \in \Pi(H)$. Наконец, замечаем, что $\pi = \mathrm{E}^* H \geqslant \mathrm{E}^*(H \wedge n) = \mathrm{E}^* X_T^{n+1} = X_0^{n+1} = \tilde{\pi} > c$. Формула для $\pi_{\sup}(H)$ также установлена. □

Пример 5.34. Рассмотрим опцион покупки $C^{\mathrm{call}} = (d_T^1 - K)^+$. Пусть $d_t^0 = \prod_{k=1}^t (1 + r_t)$, где $r_t \geqslant 0$. Тогда $d_0^0 = 1$ и детерминированная последовательность d_t^0 возрастает по t. Для любой меры $P^* \in \mathcal{M}(P)$ теорема 5.12 даёт безарбитражную цену

$$\pi^{\mathrm{call}} = \mathrm{E}^* \frac{C^{\mathrm{call}}}{d_T^0} = \mathrm{E}^* \left(X_T^1 - \frac{K}{d_T^0} \right)^+ .$$

Неравенство Йенсена для выпуклой функции $\varphi(x) = x^+$ приводит к следующему:

$$\pi^{\text{call}} \geqslant \left(\mathrm{E}^*\left(X_T^1 - \frac{K}{d_T^0}\right)\right)^+ = \left(d_0^1 - \mathrm{E}^*\frac{K}{d_T^0}\right)^+ \geqslant (d_0^1 - K)^+. \tag{5.16}$$

Разность между левой и правой частью неравенства (5.16) называют *временно́й стоимостью европейского опциона.*

Пример 5.35. Рассмотрим опцион продажи $C^{\text{put}} = (K - d_T^1)^+$. Если процесс цен d_t^0 постоянен, то неравенство типа (5.16) сохраняется. В общем случае поскольку имеет место паритет $C^{\text{call}} - C^{\text{put}} = d_T^1 - K$, то при больших внутренних стоимостях *временна́я стоимость опциона продажи* становится отрицательной.

В следующей теореме характеризуется достижимость платёжного обязательства через множество $\Pi(H)$ (сравнить со следствием 4.9).

Теорема 5.36. *Пусть H — дисконтированное обязательство. Тогда:*

а) *если обязательство H достижимо, то множество* $\Pi(H) = \{V_0\}$, *где V_t — процесс стоимости любой реплицирующей стратегии;*

б) *если обязательство H недостижимо, то* $\pi_{\inf}(H) < \pi_{\sup}(H)$ *и* $\Pi(H) = (\pi_{\inf}(H), \pi_{\sup}(H))$.

Доказательство. Утверждение а) следует из того, что $\bar{\xi}_t \cdot \bar{X}_t = \mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_t)$ для всех $t \in 0 : T$, и теоремы 5.33. В частности, $\bar{\xi}_0 \cdot \bar{X}_0 = \mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_0) = V_0$. Для доказательства б) заметим, что множество $\Pi(H)$ по теореме 5.33 является одномерным промежутком. Осталось показать его открытость. Пусть $P^* \in \mathcal{M}(P)$ и $\pi = \mathrm{E}^*H$. Пусть $U_t = \mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_t)$ для всех $t \in 0 : T$. Отсюда $H = U_0 + \sum_{t=1}^T \Delta U_t$. Поскольку обязательство H недостижимо, существует такое $t \in 1 : T$, что $\Delta U_t \notin \mathcal{K}_t \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*)$, где $\mathcal{K}_t$ определено в (5.10). В параграфе 7.3 отмечалось, что множество $\mathcal{K}_t \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*)$ является замкнутым линейным подпространством в $L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*)$. Поэтому по теореме Хана—Банаха (см. упражнение 5.16) найдётся величина $z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*)$ такая, что

$$\sup\{\mathrm{E}^*(wz) : w \in \mathcal{K}_t \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*)\} < \mathrm{E}^*(z\Delta U_t) < \infty.$$

В силу линейности получаем:

$$\mathrm{E}^*(wz) = 0 \text{ для всех } w \in \mathcal{K}_t \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*), \tag{5.17}$$

и значит,

$$\mathrm{E}^*(z\Delta U_t) > 0. \tag{5.18}$$

Можем считать, что $|z| \leqslant 1/3$. Тогда величина $\hat{z} = 1 + z - \mathrm{E}^*(z|\mathcal{F}_{t-1})$ будет положительной, и выполняется неравенство $1/3 \leqslant \hat{z} \leqslant 5/3$. Введём меру $\hat{P} \sim P$ с плотностью $d\hat{P}/dP^* = \hat{z}$. Имеем соотношения:

$$\hat{\mathrm{E}}H = \mathrm{E}^*(H\hat{z}) = \mathrm{E}^*H + \mathrm{E}^*(\mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_t)z) - \mathrm{E}^*(\mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_{t-1})\mathrm{E}^*(z|\mathcal{F}_{t-1})) =$$
$$= \mathrm{E}^*H + \mathrm{E}^*(zU_t) - \mathrm{E}^*(zU_{t-1}) > \mathrm{E}^*H = \pi$$

ввиду неравенства (5.18). С другой стороны, выполняется неравенство $\hat{\mathrm{E}}H \leqslant 5\mathrm{E}^*H/3 < \infty$. Осталось показать, что $\hat{P} \in \mathcal{M}(P)$. Для $k > t$ с помощью (5.13) находим $\hat{\mathrm{E}}(\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \mathrm{E}^*(\hat{z}\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1})\ /\mathrm{E}^*(\hat{z}|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$, поскольку величину $\hat{z}$ можно вынести за знак условного ожидания. Для $k = t$ из (5.17) получаем, что $\mathrm{E}^*(z\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Учитывая (5.13) и равенство $\mathrm{E}^*(\hat{z}|\mathcal{F}_{t-1}) = 1$, находим, что

$$\hat{\mathrm{E}}(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}^*(\Delta X_t(1 - \mathrm{E}^*(z|\mathcal{F}_{t-1}))|\mathcal{F}_{t-1}) + \mathrm{E}^*(z\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Наконец, случай $k < t$ опять приводит к нулевому равенству

$$\hat{\mathrm{E}}(\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \mathrm{E}^*(\hat{z}\Delta X_k|\mathcal{F}_{k-1})/\mathrm{E}^*(\hat{z}|\mathcal{F}_{k-1}) = \mathrm{E}^*(\mathrm{E}^*(\Delta X_k(z-$$
$$-\mathrm{E}^*(z|\mathcal{F}_{t-1}))|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_{k-1})/\mathrm{E}^*(\hat{z}|\mathcal{F}_{k-1}) = 0.$$

Теперь введём меру $\check{P}$ с плотностью $d\check{P}/dP^* = 2 - \hat{z}$. Нетрудно проверить, что $\check{P} \in \mathcal{M}(P)$ и $\check{\mathrm{E}}H < \mathrm{E}^*H = \pi$. Утверждение б) доказано. □

Если $T_0 < T$ и $C_0 \geqslant 0$ —$\mathcal{F}_{T_0}$-измеримая величина, то результаты приложимы к дисконтированной величине $H_0 = C_0/d^0_{T_0}$. Перейдём к платёжному обязательству $C = H_0 d^0_T$, для которого дисконтированная величина $H = C/d^0_T = H_0$. Можно прилагать результаты к H или учитывать урезанный временной интервал $0 : T_0$, результат будет одинаков. Введём множество $\mathcal{M}_0(P)$ эквивалентных мартингальных для интервала $0 : T_0$.

Утверждение 5.37. *Пусть $P^*_0 \in \mathcal{M}_0(P)$. Тогда существует мера $P^* \in \mathcal{M}(P)$, для которой сужение на σ-алгебру $\mathcal{F}_{T_0}$ равно P^*_0.*

Доказательство. Пусть $\hat{P} \in \mathcal{M}(P)$ произвольна. Обозначим z_{T_0} плотность P^*_0 по отношению к ограничению меры $\hat{P}$ на под-σ-алгебру $\mathcal{F}_{T_0}$. Тогда плотность $dP * /d\hat{P} = z_{T_0}$ определяет меру P^* на $\mathcal{F}$. Ясно, что $P^* \sim \hat{P}$ и $P^* \sim P$. На $\mathcal{F}_{T_0}$ имеем $P^* = P^*_0$. Для $t > T_0$ будем иметь $\mathrm{E}^*(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \hat{\mathrm{E}}(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$, поскольку плотность z_{T_0} является измеримой относительно $\mathcal{F}_{t-1}$ и в формуле типа (5.13) её можно вынести из-под знака условного ожидания. □

Пример 5.38. Рассмотрим ситуацию примера 5.34 и сравним опционы $C_0 = (d^1_{T_0} - K)^+$ и $C = (d^1_T - K)^+$. Пусть $P^* \in \mathcal{M}(P)$. Используя неравенство Йенсена (см. формулу после (5.8)), находим:

$$\mathrm{E}^*(C/d^0_T|\mathcal{F}_{T_0}) \geqslant \left(d^1_{T_0} - K d^0_{T_0}/d^0_T\right)^+ / d^0_{T_0} \geqslant C_0/d^0_{T_0}. \tag{5.19}$$

Отсюда, в частности, получаем убывание дисконтированной цены опциона: $\mathrm{E}^*(C/d^0_T) \geqslant \mathrm{E}^*(C_0/d^0_{T_0})$.

5.5. Полные рынки

Как и в главе 5, *полными рынками* называются такие NA-рынки, на которых любые платёжные обязательства достижимы. В случае дискретного времени очень ограниченный класс моделей обладает указанным свойством. Подобно одношаговому случаю справедлива следующая теорема.

Теорема 5.39. *NA-рынок полон тогда и только тогда, когда существует единственная эквивалентная мартингальная мера. В этом случае пространство $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ разбивается на атомы, число которых не превышает $(n+1)^T$.*

Доказательство. Пусть рынок полон. Тогда $H = I_A$, где $A \in \mathcal{F}_T$, является достижимым платёжным обязательством. Следовательно, согласно теоремам 5.30, 5.33, замечанию 5.31 и формуле (5.15) величина $P^*(A)$ постоянна для всех $P^* \in \mathcal{M}(P)$. Следовательно, множество $\mathcal{M}(P)$ состоит из одного элемента. Обратно, если $|\mathcal{M}(P)| = 1$, то множество $\Pi(H)$ состоит из одного элемента. По теореме 5.36 получаем, что любое обязательство H достижимо.

Второе утверждение доказывается по индукции. Для $T = 1$ утверждение верно по теореме 4.14. Пусть утверждение имеет место для $T-1$. По предположению любая ограниченная случайная $\mathcal{F}_T$-измеримая величина $H \geqslant 0$ может быть записана как $H = V_{T-1} + \xi_T \cdot \Delta X_T$, где V_{T-1} и ξ_T являются $\mathcal{F}_{T-1}$-измеримыми. По предположению пространство $(\Omega, \mathcal{F}_{T-1}, P)$ разбивается на конечное число атомов. Но измеримая функция на пространстве с атомами постоянна на каждом атоме. Действительно, для всякого $p \in [0, \infty]$ имеем формулу размерности:

$$\begin{gathered}\dim L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists\,\text{разбиение}\ \Omega = \sqcup_{i=1}^n A_i,\\ A_i \in \mathcal{F},\ P(A_i) > 0\}.\end{gathered} \tag{5.20}$$

Более того, размерность в формуле (5.20) равна n тогда и только тогда, когда существует разбиение на n атомов. Индикаторные функции I_{A_i} образуют базис пространства $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Из всего высказанного следует, что вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}_T, P(\cdot|A))$ с условной мерой $P(\cdot|A)$, где A — атом пространства $(\Omega, \mathcal{F}_{T-1}, P)$, имеет размерность не выше чем $n+1$.

Следовательно, и пространство $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, имеет размерность не выше чем $(n+1)^T$. $\square$

Весьма интересно, что свойство полноты рынка характеризуется также через специальные свойства выпуклых множеств $\mathcal{M}(P)$ и $\mathcal{P}$ (см. определение перед леммой 5.11).

Теорема 5.40. *Для меры $P^* \in \mathcal{M}(P)$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{M}(P) = \{P^*\}$;

б) P^* *— крайняя точка множества* $\mathcal{M}(P)$;

в) P^* *— крайняя точка множества* $\mathcal{P}$;

г) *любой скалярный P^*-мартингал M представим в виде мартингального преобразования $M_t = M_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot \Delta X_k$ для $t \in 0 : T$,*

где ξ_k — n-мерный предсказуемый процесс.

Доказательство. Крайней точкой выпуклого множества называется такой его элемент, который нельзя представить в виде нетривиальной выпуклой комбинации других элементов этого множества. Из а) следует в). Пусть, от противного, $P^* = \alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2$, где $\alpha \in (0,1)$ и $Q_i \in \mathcal{P}$, $i \in 1:2$, $Q_1 \neq Q_2$. Обе меры $Q_i \ll P^*$. Поэтому меры $P_i = (Q_i + P^*)/2$ различны, мартингальны и обе эквивалентны P^*, но это противоречит (а).

Из в) с очевидностью следует б). Докажем импликацию б)$\Rightarrow$а). Пусть существует $\hat{P} \in \mathcal{M}(P)$ такая, что $\hat{P} \neq P^*$. Предположим сначала, что плотность $d\hat{P}/dP^*$ ограничена сверху числом $c > 1$. Зададим число $\varepsilon < 1/c$. Тогда плотность $dP'/dP^* = 1 + \varepsilon(1 - d\hat{P}/dP^*)$ определяет другую меру $P' \in \mathcal{M}(P)$. Кроме того, $P^* = (\varepsilon \hat{P} + P')/(1+\varepsilon)$, что противоречит условию (б). Остаётся найти ограниченную плотность $d\hat{P}/dP^*$. Пусть $\tilde{P} \neq P^*$ и $\tilde{P} \in \mathcal{M}(P)$. Берём такое $A \in \mathcal{F}_T$, что $P^*(A) \neq \tilde{P}(A)$. Вводим дополнительный актив $X_t^{n+1} = \tilde{P}(A|\mathcal{F}_t)$. Меру P^* берём за основную. Получается, что $\tilde{P}$ — эквивалентная мартингальная мера для последовательности $[X_t^0; \ldots; X_t^{n+1}]$. Расширенный рынок безарбитражен, и по теореме 5.12 существует мартингальная мера $\hat{P}$ с ограниченной плотностью $d\hat{P}/dP^*$. Мера $\hat{P} \neq P^*$, поскольку $X_0^{n+1} = \tilde{P}(A) \neq P^*(A) = \mathrm{E}^*(X_T^{n+1})$, т. е. мера P^* не является мартингальной для компонеты X_t^{n+1}.

Из а) следует г). Представим $M_T = M_T^+ - M_T^-$. Неотрицательные случайные величины M_T^+ и M_T^- достижимы по теореме 5.39. Значит, существуют предсказуемые процессы $\xi_k^\pm$ такие, что

$$M_T^\pm = V_0^\pm + \sum_{k=1}^{T} \xi_k^\pm \cdot \Delta X_k \ P^*\text{-п.н.}$$

Процессы стоимости $V_t^{\pm} = V_0^{\pm} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k^{\pm} \cdot \Delta X_k$ являются P^*-мартингалами. Значит, по теореме 5.30 получаем $M_t = \mathrm{E}^*(M_T^+ - M_T^- | \mathcal{F}_t) = V_t^+ - V_t^-$. Представление получено.

Из (г) следует (а). Применим предположение к мартингальной величине $M_t = P^*(A\,|\mathcal{F}_t)$ и получим, что $H = I_A$ — достижимое обязательство. В силу замечания 5.31 величина $P^*(A)$ постоянна по P^*. Отсюда мартингальная мера единственна. □

5.6. Примеры безарбитражных рынков

Приведём некоторые примеры полных и неполных безарбитражных рынков.

5.6.1. Биномиальный рынок. Модель рассмотрена Коксом, Россом и Рубинштейном в 1979 году. Рынок состоит из безрисковой облигации $d_t^0 = (1+r)^t$, где $r > -1$, и одного рискового актива $d_t^1 = d_t$ с нормой прибыли $R_t = (d_t - d_{t-1})/d_{t-1}$. Здесь случайная величина $R_t \in \{a, b\}$, причём $-1 < a < b$. Построим модель на пространстве исходов. Положим $\Omega = \{a, b\}^T = \{\omega = [y_1, \ldots, y_t] : y_i \in \{a, b\}\}$. Процесс цен определяется по формуле $d_t = d_0 \prod_{k=1}^{t} (1 + R_k)$. Поток σ-алгебр задаётся как $\mathcal{F}_t = \sigma(R_1, \ldots, R_t) = \sigma(d_0, \ldots, d_t)$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. σ-алгебра $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ совпадает с 2^{Ω}. Фиксируется мера P на $(\Omega, \mathcal{F})$ с условием $P(\{\omega\}) > 0$, $\forall\, \omega \in \Omega$. Такой рынок называется *биномиальным.*

Теорема 5.41. *Биномиальный рынок является NA тогда и только тогда, когда $a < r < b$. В этом случае рынок полон. Мартингальная мера P^* такова, что величины $R_1, \ldots, R_T$ независимы между собой относительно P^* и одинаково распределены: $P^*(R_t = b) = p^* = (r-a)/(b-a)$, $t \in 1:T$.*

Доказательство. Мера Q на $(\Omega, \mathcal{F})$ будет мартингальной тогда и только тогда, когда дисконтированный процесс цен $X_t = d_t/d_t^0$ будет Q-мартингалом, т. е. $\mathrm{E}^Q(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0 = X_{t-1}\mathrm{E}^Q((1+R_t)/(1+r) - 1|\mathcal{F}_{t-1})$ Q-п.н. для всех $t \in 1:T$. Это равенство эквивалентно уравнению $r = \mathrm{E}^Q(R_t|\mathcal{F}_{t-1}) = bQ(R_t = b|\mathcal{F}_{t-1}) + a(1 - Q(R_t = b|\mathcal{F}_{t-1}))$, откуда находим $Q(R_t = b|\mathcal{F}_{t-1}) = p^* = (r-a)/(b-a)$, $t \in 1:T$. Найденные соотношения возможны тогда и только тогда, когда величины R_t независимы и имеют одинаковое распределение $Q(R_t = b) = p^*$. Мартингальная мера единственна.

Если рынок безарбитражный, то найдётся эквивалентная мартингальная мера $P^* \sim P$. Тогда $p^* = P^*(R_1 = b) \in (0, 1)$. Это возможно лишь в случае $a < r < b$. Обратно, если $a < r < b$, то определим меру $P^* \sim P$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ так, чтобы $P^*(\{\omega\}) = (p^*)^k (1-p^*)^{T-k} > 0$ на элементарном событии ω, где b появляется среди координат ровно k раз. По существу, это схема Бернулли, где величины R_t независимы в совокупности и имеют одинаковое распределение $P^*(R_t = b) = p^*$. Итак, P^* — эквивалентная мартингальная мера. □

Из сказанного в теореме 5.41 следует, что в биномиальном рынке цена платёжного обязательства не зависит от первоначально выбранной меры P.

Сформируем цену заданного платёжного обязательства. Дисконтированное обязательство представлено в виде $H = C/d_T^0 = h(d_0, \dots, d_T)$ для подходящей функции h.

Утверждение 5.42. *Процесс стоимости* $V_t = \mathrm{E}^*(H|\mathcal{F}_t)$ *для* $t \in 0 : T$ *имеет вид* $V_t(\omega) = v_t(d_0, d_1(\omega), \dots, d_t(\omega))$, *где функция* v_t *задаётся формулой*

$$v_t(x_0, \dots, x_t) = \mathrm{E}^*(h(x_0, \dots, x_t, x_t d_1/d_0, \dots, x_t d_{T-t}/d_0)). \tag{5.21}$$

Доказательство. Запишем очевидное равенство

$$V_t = \mathrm{E}^*(h(d_0, \dots, d_t, d_t d_{t+1}/d_t, \dots, d_t d_T/d_t)|\mathcal{F}_t).$$

Заметим, что $d_{t+s}/d_t = \prod_{k=t+1}^{t+s}(1 + R_k)$ не зависит от $\mathcal{F}_t$ и имеет то же распределение, что d_s/d_0. От условного распределения в силу указанных свойств переходим к безусловному и получаем формулу (5.21). □

Из (5.21) можно получить рекуррентную формулу для V_t, т.к. $V_t = \mathrm{E}^*(V_{t+1}\,|\mathcal{F}_t)$ для $t \in 0 : T-1$. Имеем

$$\begin{gathered} v_T(x_0, \dots, x_T) = h(x_0, \dots, x_T), \quad v_t(x_0, \dots, x_t) = \\ = p^* v_{t+1}(x_0, \dots, x_t, x_t\hat{b}) + (1-p^*) v_{t+1}(x_0, \dots, x_t, x_t\hat{a}), \end{gathered} \tag{5.22}$$

где $\hat{a} = 1 + a$, $\hat{b} = 1 + b$.

Пример 5.43. Рассмотрим частный случай $H = h(d_T)$. Используем формулы (5.22) для явного вычисления функции $v_t(x_t)$. Для $t = T-1$ получаем $v_{T-1} = p^* h(x_{T-1}\hat{b}) + (1-p^*) h(x_{T-1}\hat{a})$. Действуя по индукции, находим

$$v_{T-i} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (p^*)^k (1-p^*)^{i-k} h\big(x_{T-i}\hat{b}^k \hat{a}^{i-k}\big).$$

Здесь $C_i^k = i!/k!/(i-k)!$ — биномиальный коэффициент. В частности, безарбитражная цена обязательства H равна

$$\pi(H) = v_0(d_0) = \sum_{k=0}^{T} C_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k} h\big(d_0 \hat{b}^k \hat{a}^{T-k}\big).$$

Для опционов покупки и продажи здесь надо подставить функции $h(x) = (x-K)^+/(1+r)^T$ и $h(x) = (K-x)^+/(1+r)^T$.

Упражнение 5.44. Пусть дисконтированное обязательство имеет вид $H = h(d_T, M_T)$, где $M_t = \max_{s\in 0:t} d_s$. С помощью формулы (5.21) показать, что процесс стоимости $V_t = v_t(d_t, M_t)$. Найти вид функции $v_t(x_t, m_t)$.

Упражнение 5.45. Вернёмся к примеру 5.34. В MatLab построить график функции π^{call} от d_0 и сравнить его с правой частью неравенства (5.16). Значение π^{call} взять из примера 5.43, задав параметры a, b, r. Рассмотреть аналогичное построение для π^{put}.

Поскольку биномиальный рынок полон, то $H = V_T = V_0 + \sum_{t=1}^T \xi_t \cdot \Delta X_t$ для всякого дисконтированного обязательства $H = h(d_0, \ldots, d_T)$. Следующее утверждение даёт формулу для стратегии ξ_t.

Утверждение 5.46. *Стратегия ξ_t задаётся формулой $\xi_t(\omega) = \Delta_t(d_0, \ldots, d_{t-1}(\omega))$, где*

$$\Delta_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) = (1+r)\frac{v_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}\hat{b}) - v_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}\hat{a})}{x_{t-1}(\hat{b}-\hat{a})}.$$

Доказательство. Справедливо соотношение

$$\xi_t(\omega) \cdot \Delta X_t(\omega) = \Delta V_t(\omega). \tag{5.23}$$

В этом равенстве величины ξ_t, X_{t-1} и V_{t-1} зависят только от первых $t-1$ компонент вектора ω. Определим элементарные события

$$\omega^+ = [y_1, \ldots, y_{t-1}, b, \ldots, y_T] \text{ и } \omega^- = [y_1, \ldots, y_{t-1}, a, \ldots, y_T].$$

Подставим их в равенство (5.23):

$$\xi_t(\omega) \cdot (X_{t-1}(\omega)\hat{b}/(1+r) - X_{t-1}(\omega)) = V_t(\omega^+) - V_{t-1}(\omega),$$
$$\xi_t(\omega) \cdot (X_{t-1}(\omega)\hat{a}/(1+r) - X_{t-1}(\omega)) = V_t(\omega^-) - V_{t-1}(\omega).$$

Вычитая из первого второе, получим $\xi_t(\omega) = (1+r)\frac{V_t(\omega^+)-V_t(\omega^-)}{X_{t-1}(\omega)(\hat{b}-\hat{a})} = \Delta_t(d_0, \ldots, d_{t-1}(\omega))$. □

Отметим ещё, что при $H = h(d_T)$ с неубывающей функцией h функция $v_t(x) = \mathrm{E}^* h(x d_{T-t}/d_0)$ также не убывает. Отсюда следует неотрицательность

$$\xi_t(\omega) = (1+r)\frac{v_t(d_{t-1}(\omega)\hat{b}) - v_t(d_{t-1}(\omega)\hat{a})}{X_{t-1}(\omega)(\hat{b}-\hat{a})} \geqslant 0.$$

5.6.2. Гауссовский рынок. Рынок состоит из безрисковой облигации $d_t^0 \equiv 1$ и одного рискового актива d_t с нормой прибыли $R_t = (d_t - d_{t-1})/d_{t-1}$, где случайная величина $R_t = e^{\rho_t} - 1$. Здесь $\rho_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$ и случайные величины ε_t являются независимыми при разных t и стандартными гауссовскими, т. е. $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Пусть поток $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t)$ и $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, где $\Omega = \mathbb{R}^T$. Таким образом, основной мерой на рынке будет стандартная гауссовская мера P на $\mathbb{R}^T$. Относительно величин μ_t и $\sigma_t \geqslant 0$ предположим, что они являются предсказуемыми, т. е. $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримыми.

По построению имеем рекуррентное соотношение $d_t = d_{t-1} e^{\rho_t}$, и значит, $d_t = d_0 \exp(\sum_{k=1}^t \rho_k)$.

Теорема 5.47. *Гауссовский рынок безарбитражен.*

Доказательство. Введём меру $\tilde{P}$ с плотностью $d\tilde{P}/dP = Z_T = z_1 \cdots z_T$, где величины z_t имеют вид:

$$z_t = e^{a_t \rho_t} / \mathrm{E}(e^{a_t \rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}). \tag{5.24}$$

Предсказуемые величины a_t будем подбирать так, чтобы последовательность d_t была мартингалом относительно меры $\tilde{P}$. Поэтому соотношение $\tilde{\mathrm{E}}(\Delta d_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ после сокращения на d_{t-1} сводится к равенству

$$\tilde{\mathrm{E}}(e^{\rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}) = 1,$$

которое должно выполняться для всех $t \in 1:T$. Для $t = 1$ получаем $\tilde{\mathrm{E}} e^{\rho_1} = \mathrm{E}(z_1 \cdots z_T e^{\rho_1}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(z_1 \cdots z_T e^{\rho_1} | \mathcal{F}_{T-1})) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(z_1 \cdots z_{T-1} e^{\rho_1} | \mathcal{F}_{T-2})) = \cdots = \mathrm{E}(z_1 e^{\rho_1}) = 1$. Используя (5.24), получаем $\mathrm{E} e^{\rho_1 (1 + a_1)} = \mathrm{E} e^{\rho_1 a_1}$. Отсюда равенство $e^{\mu_1 (1+a_1) + (\sigma_1 (1+a_1))^2/2} = e^{\mu_1 a_1 + (\sigma_1 a_1)^2/2}$. Решая это уравнение, найдём $a_1 = -\mu_1/\sigma_1^2 - 1/2$. При $\sigma_1 = 0$ обязательно и $\mu_1 = 0$, поэтому этот шаг можно пропустить. Наша цель — доказать, что $a_t = -\mu_t/\sigma_t^2 - 1/2$. Пусть это доказано для всех шагов до момента t включительно. Для следующего шага $\tilde{\mathrm{E}}(e^{\rho_{t+1}} | \mathcal{F}_t) = 1$. По определению условного ожидания будем иметь $\tilde{\mathrm{E}}(e^{\rho_{t+1}} I_A) = \tilde{\mathrm{E}}(I_A)$ для любых множеств $A \in \mathcal{F}_t$. Следовательно, $\mathrm{E}(e^{\rho_{t+1}} I_A z_1 \cdots z_{t+1}) = \mathrm{E}(I_A z_1 \cdots z_t)$ или $\mathrm{E}((\mathrm{E}(e^{\rho_{t+1}} z_{t+1} | \mathcal{F}_t) - 1) I_A z_1 \cdots z_t) = 0$. Отсюда в силу неравенства $z_1 \cdots z_t > 0$ и произвольности A получаем $\mathrm{E}(e^{\rho_{t+1}} z_{t+1} | \mathcal{F}_t) = 1$ или $\mathrm{E}(e^{\rho_{t+1}(1 + a_{t+1})} | \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(e^{\rho_{t+1} a_{t+1}} | \mathcal{F}_t)$. Поскольку при подстановке $\rho_{t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \varepsilon_{t+1}$ параметры μ_{t+1}, σ_{t+1} можно считать постоянными, повторяются вычисления первого шага, и оказывается, что $a_{t+1} = -\mu_{t+1}/\sigma_{t+1}^2 - 1/2$. Итак, предсказуемые величины a_t в (5.24) однозначно определяются по предсказуемым параметрам μ_t, σ_t по установленной формуле. Поскольку $Z_T > 0$, мера $\tilde{P} \sim P$. Построенная плотность имеет вид:

$$Z_T(x) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{T}\left(\nu_k x_k + \nu_k^2/2\right)\right), \text{ где } \nu_k = \mu_k/\sigma_k + \sigma_k/2. \qquad (5.25)$$

При умножении этой плотности на стандартную гауссовскую плотность получим плотность меры $\tilde{P}$ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^T$. □

Отметим, что гауссовский рынок неполон. Действительно, если бы мы предположили обратное, то по теореме 5.39 пространство $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$ имело бы конечную размерность, не превышающую 2^T. Но по построению это невозможно, т.к. атомов в построенном пространстве нет.

Упражнение 5.48. Используя формулу (5.25) и стандартную гауссовскую плотность, рассчитать безарбитражные стоимости $\tilde{\mathrm{E}}C^{\mathrm{call}} = \tilde{\mathrm{E}}(d_T - K)^+$ и $\tilde{\mathrm{E}}C^{\mathrm{put}} = \tilde{\mathrm{E}}(K - d_T)^+$. Положить $T = 2$ и $\mu_k = \sigma_k = d_0 = 1$.

Упражнение 5.49. В условиях примера 5.34 для гауссовского рынка построить в MatLab график функции π^{call} от d_0 и сравнить его с правой частью неравенства (5.16). Значение π^{call} подсчитать, используя параметры предыдущего примера. Рассмотреть аналогичное построение для π^{put}.

Глава 6

Американские платёжные обязательства

Выше рассматривались платёжные обязательства, подлежащие исполнению в фиксированный момент времени. Американские платёжные обязательства могут исполняться в случайный момент времени $\tau(\omega)$, зависящий от развития или реализации элементарного случайного события ω.

6.1. Изучение с точки зрения продавца

Вначале расширим понятие мартингала, введя *субмартингалы* и *супермартингалы*. Субмартингалом называется адаптированный к потоку $\mathcal{F}_t$ интегрируемый процесс M_t, для которого $\mathrm{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geqslant M_s$ для всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Если $M_t = -S_t$, где S_t — субмартингал, то M_t называется супермартингалом. Для полноты изложения приведём результат Дуба.

Утверждение 6.1. *Пусть задан адаптированный процесс Y_t такой, что $Y_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ для всех $t \in 0 : T$. Тогда существует единственное разложение*

$$Y_t = M_t - A_t,\ t \in 0 : T, \tag{6.1}$$

где M_t — P-мартингал, A_t — предсказуемый процесс с $A_0 = 0$. В представлении (6.1) *процесс Y_t будет супермартингалом тогда и только тогда, когда последовательность A_t — неубывающая.*

Доказательство. Пусть представление имеет место. Определим процесс A_t по рекуррентной формуле $\Delta A_t = -\mathrm{E}(\Delta Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$. Отсюда процесс A_t определится суммой $A_t = -\sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}(\Delta Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$. Значит, представление является единственным. Чтобы доказать существование разложения, определим предсказуемый процесс, как указано, и положим $M_t = Y_t + A_t$. Поскольку $\mathrm{E}(\Delta M_t\ |\mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}(\Delta Y_t|\mathcal{F}_{t-1}) + \mathrm{E}(\Delta A_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$, то процесс M_t является мартингалом. Наконец, условие супермартингальности $\mathrm{E}(\Delta Y_t|\mathcal{F}_{t-1}) \leqslant 0$ эквивалентно неубыванию процесса A_t. □

Следует отметить, что выплата по американскому платёжному обязательству никак не меньше, чем по европейскому. Действительно, если C^E — европейское обязательство в фиксированный момент (например, T), то покупатель может предъявить следующее:

$$C_t^A = \begin{cases} 0, & \text{если } t < T, \\ C^E, & \text{если } t = T. \end{cases} \tag{6.2}$$

Далее в этом параграфе предполагаем, что рынок безарбитражен и полон, т. е. $\mathcal{M}(P) = \{P^*\}$. Для дисконтированного обязательства H_t введём определение.

Определение 6.2. Процесс U_t, определённый соотношениями

$$U_T = H_T, \quad U_t = H_t \vee \mathrm{E}^*(U_{t+1}|\mathcal{F}_t), \quad t \in 0 : T-1, \tag{6.3}$$

называется *огибающей Снелла* процесса H_t по мере P^*.

Так, например, огибающая процесса H_t^A, связанного с H^E формулой (6.2), имеет вид: $U_t^{P^*} = \mathrm{E}^*(H_T^A|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}^*(H^E|\mathcal{F}_t)$. Итак, огибающая совпадает с процессом стоимости. Огибающая Снелла определяется для любой вероятностной меры Q на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ и любого интегрируемого согласованного процесса H_t.

Утверждение 6.3. *Пусть H_t — интегрируемый согласованный процесс. Тогда огибающая Снелла U_t^Q — это наименьший Q-супермартингал, мажорирующий H_t. Другими словами, если $\tilde{U}_t$ — другой супермартингал со свойством $\tilde{U}_t \geqslant H_t$ Q-п.н., то $\tilde{U}_t \geqslant U_t^Q$ Q-п.н. для всех t.*

Доказательство. Из определения огибающей следует неравенство $U_{t-1}^Q \geqslant \mathrm{E}^Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1})$. Супермартингальность доказана. Если $\tilde{U}_t$ — другой супермартингал со свойством $\tilde{U}_t \geqslant H_t$, то $\tilde{U}_T \geqslant H_T = U_T^Q$. Согласно обратной индукции предполагаем, что $\tilde{U}_t \geqslant U_t^Q$. Тогда $\tilde{U}_{t-1} \geqslant \mathrm{E}^Q(\tilde{U}_t|\mathcal{F}_{t-1}) \geqslant$ $\geqslant \mathrm{E}^Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1})$. Поскольку $\tilde{U}_{t-1} \geqslant H_{t-1}$, то $\tilde{U}_{t-1} \geqslant H_{t-1} \vee \mathrm{E}^Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) =$ $= U_{t-1}^Q$. Что и требовалось доказать. □

С помощью утверждения 6.3 продавец обязательства может хеджировать (обеспечить исполнение) дисконтированного американского обязательства. Используется разложение Дуба $U_t^{P^*} = M_t - A_t$, где A_t — предсказуемый неубывающий процесс. По теореме 5.40 получаем представление:

$$M_t = U_0^{P^*} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \Delta X_k, \ t \in 0 : T. \tag{6.4}$$

Отсюда находим $M_t \geqslant U_t^{P^*} \geqslant H_t$. Добавив ξ_t^0, получим самофинансируемую и суперхеджирующую стратегию $\bar{\xi}_t$ с процессом стоимости $V_t \geqslant H_t$. Процесс $U_t^{P^*}$ оказывается наименьшей инвестицией для хеджирования.

Теорема 6.4. *Пусть H_t — дисконтированное американское обязательство с огибающей Снелла $U_t^{P^*}$. Тогда существует n-мерный предсказуемый процесс ξ_t такой, что*

$$U_t^{P^*} + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k \Delta X_k \geqslant H_u \text{ для всех } u \geqslant t. \tag{6.5}$$

Более того, для любой адаптированной случайной последовательности $\tilde{U}_t$, удовлетворяющей неравенству (6.5) с соответствующим предсказуемым процессом $\tilde{\xi}_t$, справедливо неравенство $\tilde{U}_t \geqslant U_t^{P^*}$. Это означает, что огибающая Снелла является наименьшей величиной для хеджирования обязательства H_t от момента t до окончания действия обязательства.

Доказательство. Процесс $U_t^{P^*}$ удовлетворяет неравенству (6.5) с процессом в формуле (6.4). Пусть

$$V_u = \tilde{U}_t + \sum_{k=t+1}^{u} \tilde{\xi}_k \Delta X_k \geqslant H_u \text{ для всех } u \geqslant t.$$

Покажем, что $V_u \geqslant U_u^{P^*}$. Для $t = T$ имеем $V_T \geqslant H_T = U_T^{P^*}$. Пусть $V_{u+1} \geqslant U_{u+1}^{P^*}$ для некоторого u. Из полноты рынка следует ограниченность процесса $\tilde{\xi}_k$ по теореме 5.39. Поэтому получаем $\mathrm{E}^*(\Delta V_{u+1}|\mathcal{F}_u) = \mathrm{E}^*(\tilde{\xi}_{u+1}\Delta X_{u+1}|\mathcal{F}_u) = 0$ P-п.н. Отсюда следует неравенство

$$V_u = \mathrm{E}^*(V_{u+1}|\mathcal{F}_u) \geqslant H_u \vee \mathrm{E}^*(U_{u+1}^{P^*}|\mathcal{F}_u) = U_u^{P^*}.$$

Обратная индукция завершена. □

6.2. Стратегии остановки для покупателя

Здесь мы переходим к точке зрения покупателя американского платёжного обязательства. Предполагается, что предъявление обязательства к оплате зависит только от состояния рынка к моменту t. Поэтому покупателю следует использовать *моменты остановки*, определённые в 5.20. Нетрудно проверить, что величины $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$ и $(\tau + \sigma) \wedge T$ будут моментами остановки, если τ, σ таковыми являются. В дальнейшем будем использовать сокращения $\mathrm{E}(XI_A) = \mathrm{E}(X; A)$ для «интеграла» по множеству A.

Упражнение 6.5. Показать, что условие быть Q-мартингалом для любого согласованного процесса $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ эквивалентно тому, что $\mathrm{E}^Q M_{\tau\wedge T} = M_0$ для любого момента остановки τ.

Указание. Выше, в 5.22, уже было показано, что «остановленная» последовательность M_t^τ является Q-мартингалом. Поэтому усреднение M_t^τ

не зависит от t. Для доказательства обратного показать, что $\mathrm{E}^Q(M_T; A) = \mathrm{E}^Q(M_t; A)$ для всякого $A \in \mathcal{F}_t$. Ввести момент остановки:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega \in A, \\ T, & \text{если } \omega \notin A, \end{cases}$$

и воспользоваться равенством $M_0 = \mathrm{E}^Q M_{\tau\wedge T} = \mathrm{E}^Q(M_T; A) + \mathrm{E}^Q(M_T; A^c)$. Затем подобное равенство записать для момента остановки $\tau = T$.

Лемма 6.6. *Пусть согласованный процесс $U_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ для всех t. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *U_t — Q-супермартингал;*

б) *остановленный процесс U_t^τ является Q-супермартингалом для любого момента остановки τ.*

Доказательство. Если $U_t = M_t - A_t$ — разложение Дуба, то равенство $U_t^\tau = M_t^\tau - A_t^\tau$ тоже разложение Дуба. Отсюда и из упражнения 6.5 следует эквивалентность условий а) и б). □

Рассмотрим множество $\mathcal{T} = \{\tau : \tau - \text{момент остановки}, \ \tau \leqslant T\}$. Задача покупателя такова:

$$\mathrm{E}H_\tau \to \max_{\tau\in\mathcal{T}}, \tag{6.6}$$

где H_t — дисконтированное американское обязательство, т. е. он хочет выбрать момент для получения максимальной выплаты. Для решения этой задачи не нужны предположения о безарбитражности и неотрицательности. Достаточно потребовать

$$H_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P) \text{ для всех } t. \tag{6.7}$$

Построим огибающую Снелла $U_t = U_t^P$ для обязательства H_t: $U_T = H_T$ и $U_t = H_t \vee \mathrm{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$, $t \in 0 : T-1$. Далее находим момент остановки $\tau_{\min} = \min\{t \geqslant 0 : U_t = H_t\}$. Это и будет решением задачи (6.6), как устанавливается ниже. Аналогично, $\tau_{\min}^t = \min\{u \geqslant t : U_u = H_u\}$. Последний момент принадлежит множеству $\mathcal{T}_t = \{\tau \in \mathcal{T} : \tau \geqslant t\}$.

Для дальнейшего потребуется понятие существенного супремума и существенного инфимума семейства случайных величин Φ. Это утверждает следующая теорема.

Теорема (о существенном супремуме). *Для всякого семейства Φ случайных величин на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ справедливо следующее:*

а) *Существует случайная величина φ^* такая, что $\varphi^* \geqslant \varphi$ P-п.н. для всех $\varphi \in \Phi$. Такая величина единственна в том смысле, что любая другая величина ψ, удовлетворяющая заданному условию,* *будет больше* φ^*, *т. е.* $\psi \geqslant \varphi^*$ P*-п.н. Введённая величина* φ^* *далее обозначается как* $\operatorname{ess\,sup} \Phi = \operatorname{ess\,sup}_{\varphi\in\Phi} \Phi$.

б) *Если для всяких функций* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ *найдётся* $\psi \in \Phi$ *такая, что* $\psi \geqslant \varphi_1 \vee \varphi_2$, *то существует последовательность* $\phi_1 \leqslant \phi_2 \leqslant \ldots$ *из* Φ *такая, что* $\lim\limits_k \phi_k = \varphi^*$ P*-п.н.*

Доказательство. Введём строго возрастающую функцию $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, например, $f(x) = 2\arctan(x)/\pi + 1$, будем рассматривать, не ограничивая общности, множество $\{f \circ \varphi : \varphi \in \Phi\}$ и примем его за Φ, чтобы не менять обозначений. Если множество $\Psi \subset \Phi$ счётно, то введём измеримую функцию $\varphi_\Psi(\omega) = \sup_{\varphi\in\Psi} \varphi(\omega)$. Далее утверждается, что верхняя грань $c = \sup\{\mathrm{E}\varphi_\Psi : \Psi \subset \Phi \text{ и счётно}\}$ достигается. Действительно, берём последовательность Ψ_k такую, что $\mathrm{E}\varphi_{\Psi_k} \to c$, полагаем $\Psi^* = \cup_k \Psi_k$, тогда получим $\mathrm{E}\varphi_{\Psi^*} = c$, Ψ^* счётно.

Доказываем, что $\varphi^* = \varphi_{\Psi^*}$ — искомая функция. Рассуждаем от противного. Существует $\varphi \in \Phi$ такая, что $P(\varphi > \varphi^*) > 0$. Тогда для подмножества $\Psi_1 = \Psi^* \cup \{\varphi\}$ имеем $\mathrm{E}\varphi_{\Psi_1} > \mathrm{E}\varphi_{\Psi^*} = c$, но это противоречит определению числа c. При условии б), используя направленность вверх множества Φ, строим монотонно неубывающую последовательность $\varphi_k \to \varphi^*$. $\square$

Введённое понятие никак не зависит от ранее используемого понятия существенного супремума $\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \varphi(\omega)$ функции φ, которое определяется как $\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \varphi(\omega) = \inf_{A\in\mathcal{F}^0} \sup_{\omega\in A^c} \varphi(\omega)$, где $\mathcal{F}^0 = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = 0\}$. Здесь также нижняя грань достигается на некотором множестве $A^* \in \mathcal{F}^0$. Для существенного инфимума все рассуждения аналогичны.

Теорема 6.7. *Огибающая Снелла* U_t *для* H_t *удовлетворяет соотношению*

$$U_t = \mathrm{E}(H_{\tau^t_{\min}}|\mathcal{F}_t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \mathrm{E}(H_\tau|\mathcal{F}_t).$$

В частности, $U_0 = \mathrm{E}H_{\tau_{\min}} = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau$.

Доказательство. Из леммы 6.6 следует, что U_t^τ — супермартингал для любого момента $\tau \in \mathcal{T}_t$. Тогда

$$U_t = U_t^\tau \geqslant \mathrm{E}(U_T^\tau|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(U_\tau|\mathcal{F}_t) \geqslant \mathrm{E}(H_\tau|\mathcal{F}_t).$$

Поэтому $U_t \geqslant \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \mathrm{E}(H_\tau|\mathcal{F}_t)$. Докажем равенство

$$U_t = \mathrm{E}(H_{\tau^t_{\min}}|\mathcal{F}_t). \tag{6.8}$$

Введём остановленный процесс $U_s^{(t)} = U_{s\wedge\tau^t_{\min}}$, и пусть $t \geqslant s \geqslant T$. Тогда на множестве $\{s < \tau^t_{\min}\}$ имеем $U_s > H_s$. Значит, для почти всех элементарных событий из этого множества будем иметь:

$$U_s^{(t)} = U_s = H_s \vee \mathrm{E}(U_{s+1}|\mathcal{F}_s) = \mathrm{E}(U_{s+1}|\mathcal{F}_s) = \mathrm{E}(U_{s+1}^{(t)}|\mathcal{F}_s).$$

Последнее равенство здесь следует из того, что $U_{s+1} = U_{s+1}^{(t)}$ на множестве $\{s < \tau_{\min}^t\} \in \mathcal{F}_s$. На дополняющем множестве $\{s \geqslant \tau_{\min}^t\} \in \mathcal{F}_s$ имеем $U_{s+1}^{(t)} = U_{\tau_{\min}^t} = U_s^{(t)}$. Отсюда следует, что $U_s^{(t)} = \mathrm{E}(U_{s+1}^{(t)}|\mathcal{F}_s)$. Итак, последовательность $U_s^{(t)}$ — мартингал начиная с момента t: $U_s^{(t)} = \mathrm{E}(U_{s+1}^{(t)}|\mathcal{F}_s)$ для всех $s \in t : T-1$. Отсюда $\mathrm{E}(U_{\tau_{\min}^t}|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(U_T^{(t)}) = U_t^{(t)} = U_t$. Равенство (6.8) доказано. □

Всякий момент $\tau \in \mathcal{T}$, удовлетворяющий равенству $\mathrm{E}H_\tau = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau$, называется *оптимальным*. Мы видим, что $\tau_{\min}$ — оптимальный момент.

Утверждение 6.8. *Момент остановки $\tau \in \mathcal{T}$ является оптимальным тогда и только тогда, когда $H_\tau = U_\tau$ P-п.н. и остановленный процесс U_t^τ является мартингалом. В частности, любой оптимальный момент остановки τ удовлетворяет неравенству $\tau \geqslant \tau_{\min}$.*

Доказательство. Пусть $H_\tau = U_\tau$ и U_t^τ — мартингал. Тогда из теоремы 6.7 следует что $\sup_{\sigma\in\mathcal{T}} \mathrm{E}H_\sigma = U_0 = \mathrm{E}U_T^\tau = \mathrm{E}U_\tau = \mathrm{E}H_\tau$, т. е. τ оптимален. Обратно, учитывая неравенство $H_\tau \leqslant U_\tau$, получим $U_0 = \mathrm{E}H_\tau \leqslant \leqslant \mathrm{E}U_\tau = \mathrm{E}U_T^\tau \leqslant U_0$ в силу леммы 6.6. Значит, $H_\tau = U_\tau$ P-п.н. Более того, равенство $\mathrm{E}U_T^\tau = \mathrm{E}U_\tau = U_0$ влечёт постоянство математического ожидания $\mathrm{E}U_t^\tau = U_0$, а для супермартингалов это означает, что на самом деле они являются мартингалами. □

Вообще говоря, может быть много оптимальных моментов остановки. Введём максимальный из них:

$$\tau_{\max} = \inf\{t \geqslant 0 : \mathrm{E}(\Delta U_{t+1}|\mathcal{F}_t) \neq 0\} \wedge T = \inf\{t \geqslant 0 : A_{t+1} \neq 0\} \wedge T.$$

Здесь A_t — неубывающий процесс для огибающей Снелла из разложения Дуба. Установим максимальность введённого момента.

Теорема 6.9. *Момент $\tau_{\max}$ — наибольший оптимальный момент остановки. Более того, момент τ оптимален тогда и только тогда, когда $\tau \leqslant \tau_{\max}$ и $U_\tau = H_\tau$ P-п.н.*

Доказательство. Супермартингал U_t^τ является мартингалом тогда и только тогда, когда $A_\tau = 0$, потому что A_t не убывает. Следовательно, U_t^τ является мартингалом тогда и только тогда, когда $\tau \leqslant \tau_{\max}$. Значит, вторая часть теоремы следует из утверждения 6.8. Осталось показать, что $U_{\tau_{\max}} = = H_{\tau_{\max}}$. Это верно на множестве $\{\tau_{\max} = T\}$. На множестве $\{\tau_{\max} = t\}$

при $t < T$ верно, что $A_t = 0$ и $A_{t+1} > 0$. Значит,

$$\mathrm{E}(\Delta U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = -\Delta A_{t+1} = -A_{t+1} < 0$$

на множестве $\{\tau_{\max} = t\}$. Следовательно, $U_t > \mathrm{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ и

$$U_t = H_t \vee \mathrm{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = H_t$$

на множестве $\{\tau_{\max} = t\}$. Теорема полностью установлена. □

Пусть опять рассматривается случай единственной безарбитражной меры P^*. Пусть $U_t^{P^*} = M_t - A_t$ — разложение Дуба для огибающей Снелла. Мартингал M_t представим в виде $M_t = U_0^{P^*} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot \Delta X_k$, $t \in 0 : T$, по теореме 5.40, причём процесс ξ_k предсказуем. Мартингал M_t совпадает с процессом стоимости самофинансируемой стратегии, построенной из процесса ξ_t и начального вложения $U_0^{P^*}$. Мартингал M_t мажоририрует H_t, и мы получаем совершенный хедж, с точки зрения продавца, т. е. если покупатель предъявляет опцион в некоторый случайный момент τ, то продавец получает доход $M_\tau - H_\tau \geqslant 0$. Следующее утверждение уточняет сказанное.

Следствие 6.10. *В предыдущих обозначениях*

$$H_\tau \leqslant M_\tau = U_0^{P^*} + \sum_{k=1}^{\tau} \xi_k \cdot \Delta X_k, \ \ P^*\text{-п.н. для всех } \tau \in \mathcal{T},$$

и равенство выполнено тогда и только тогда, когда момент τ оптимален относительно P^*.

Доказательство. В момент τ имеем $H_\tau \leqslant U_\tau^{P^*} = M_\tau - A_\tau \leqslant M_\tau$. Более того, по теореме 6.9 равенства $H_\tau = U_\tau^{P^*}$ и $A_\tau = 0$ справедливы тогда и только тогда, когда момент τ оптимален относительно P^*. □

Величину $U_0^{P^*}$ можно рассматривать как безарбитражную цену американского обязательства H. Теперь сравним американские и европейские платёжные обязательства. Пусть H_t — дисконтированное американское платёжное обязательство. Обозначим через $V_t = \mathrm{E}^*(H_T|\mathcal{F}_t)$ величину, необходимую для хеджирования H_T. В силу полноты эта величина является единственной безарбитражной ценой. С точки зрения продавца, в той же роли для американского обязательства выступает $U_t^{P^*}$. Последняя величина больше, чем V_t.

Утверждение 6.11. *Имеет место неравенство $U_t^{P^*} \geqslant V_t$, $\forall t \in 0 : T$. Если $V_t \geqslant H_t$ для всех t, то $U_t^{P^*} = V_t$, $\forall t \in 0 : T$.*

Доказательство. В силу супермартингального неравенства имеем $U_t^{P^*} \geqslant \mathrm{E}^*(U_T^{P^*}|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}^*(H_T|\mathcal{F}_t) = V_t$. Далее, если мартингал V_t мажорирует H_t, то из утверждения 6.3 следует, что $V_t \geqslant U_t^{P^*}$, т. е. величины совпадают. □

Замечание 6.12. Поясним, когда может быть $V_t \geqslant H_t$ для всех t. Пусть последовательность H_t — субмартингал, тогда $H_t \leqslant \mathrm{E}^*(H_T|\mathcal{F}_t) = V_t$. В свою очередь, рассмотрим последовательность $f(X_t)$, где f — неотрицательная выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда неравенство Йенсена приводит к субмартингальному неравенству $\mathrm{E}^*(f(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) \geqslant f(\mathrm{E}^*(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)) = f(X_t)$.

Пример 6.13. Пусть задан американский call-опцион $C_t^{\text{call}} = (d_t^1 - K)^+$. Его дисконтированная выплата имеет вид: $H_t^{\text{call}} = (X_t^1 - K/d_t^0)^+$. Если d_t^0 не убывает, то так же, как в примере 5.38 и в формуле (5.19), получим, что $\mathrm{E}^*(H_{t+1}^{\text{call}}|\mathcal{F}_t) \geqslant H_t^{\text{call}}$ P^*-п.н. для $t \in 0 : T-1$. Значит, H_t^{call} — субмартингал, и поэтому огибающая Снелла $U_t^{P^*}$ совпадает с процессом стоимости $V_t = \mathrm{E}^*((X_T^1 - K/d_T^0)^+|\mathcal{F}_t)$ соответствующего европейского опциона. Отсюда, в частности, $U_0^{P^*} = V_0$, т. е. безарбитражные цены американского опциона и европейского аналога совпадают. Из теоремы 6.9 получаем, что $\tau_{\max} = T$. Это значит, что в условиях полного рынка американский опцион не следует предъявлять к оплате до момента T окончания срока.

Пример 6.14. Если задан американский put-опцион $C_t^{\text{put}} = (K - d_t^1)^+$, то ситуация уже другая. Утверждение типа формулы (5.19) будет верно в случае, когда процесс d_t^0 не возрастает. Если же d_t^0 не убывает, то временно́е значение

$$W_t = d_t^0 \mathrm{E}^*((K - d_t^1)^+/d_T^0|\mathcal{F}_t) - (K - d_t^1)^+$$

европейского опциона продажи является, как правило, отрицательным. Это соответствует премии $-W_t$ при раннем предъявлении. Это доход владельца американского опциона продажи.

Проследим эволюцию W_t для биномиального рынка. Имеем $d_t = d_t^1 = d_0\Lambda_t$, где $\Lambda_t = \prod_{k=1}^t (1 + R_k)$. Здесь $R_k \in \{a, b\}$, причём $-1 < a < r < b$. Единственная мартингальная мера P^* такова, что величины R_k независимы в совокупности и имеют распределение (см. теорему 5.41) $P^*(R_k = b) = p^* = (r-a)/(b-a)$. Введём цену

$$\pi(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}^* \left(\frac{(K - x\Lambda_\tau)^+}{(1+r)^\tau} \right)$$

для опциона C_t^{put} как функцию от $x = d_0$. Ясно, что функция $\pi(x)$ выпуклая и невозрастающая по x. Пусть $r > 0$ и $a < 0$. Тогда для $x \geqslant K/(1+a)^T$

опцион становится «невыгодным», т. к. $\pi(x) = 0$. Если

$$x \leqslant K/(1+b)T, \tag{6.9}$$

то $d_t = x\Lambda_t \leqslant K$ для всех t. Следовательно, максимум по τ достигается при $\tau = 0$, и мы получаем $\pi(x) = K - x$. Стратегия владельца опциона состоит в немедленном предъявлении его к оплате. Такие опционы при условии (6.9) не нужны. Пусть теперь случай $K \leqslant x < K/(1+a)^T$. Тогда немедленное предъявление к оплате даёт $(K-x)^+ = 0$, а через некоторое время $P^*(C_t^{\text{put}} > 0) > 0$, т. е. $\pi(x) > 0$, и моментальное предъявление уже не будет оптимальной стратегией для покупателя. Таким образом, можно утверждать, что найдётся цена x^* такая, что $K/(1+b)^T \leqslant x^* < K$, для которой

$$\begin{cases} \pi(x) = (K-x)^+ & \text{для } x \leqslant x^*, \\ \pi(x) > (K-x)^+ & \text{для } x^* < x < K/(1+a)^T, \\ \pi(x) = 0 & \text{для } x \geqslant K/(1+a)^T. \end{cases}$$

Упражнение 6.15. Аналогично предыдущему исследовать эволюцию W_t для биномиального рынка при $a \geqslant 0$.

Рассмотрим дисконтированное американское обязательство с выплатой $H_t = h_t(d_t)$ для всех t. Опционы продажи и покупки входят в это рассмотрение как частный случай.

Упражнение 6.16. Доказать, что огибающая Снелла $U_t^{P^*}$ для H_t на биномиальном рынке имеет вид $U_t^{P^*} = u_t(d_t)$, $t \in 0 : T$, где функции u_t находятся по рекуррентной формуле

$$u_T(x) = h_T(x),\ u_t(x) = h_t(x) \vee (u_{t+1}(x\hat{b})p^* + u_{t+1}(x\hat{a})(1-p^*)),$$

где параметры такие же, как и в утверждении 5.42 и в формуле (5.22).

Согласно последнему упражнению множество $0 : T \times [0, \infty)$ может быть разложено на две области $\mathcal{R}_c = \{[t; x] : u_t(x) > h_(x)\}$ и $\mathcal{R}_s = \{[t; x] : u_t(x) = h_(x)\}$. Минимальный оптимальный момент $\tau_{\min}$ можно определить как момент первого выхода процесса $[t; d_t]$ из *области продолжения* $\mathcal{R}_c$ или как момент первого попадания в *область остановки*:

$$\tau_{\min} = \min\{t \geqslant 0 : [t; d_t] \notin \mathcal{R}_c\} = \min\{t \geqslant 0 : [t; d_t] \in \mathcal{R}_s\}.$$

6.3. Безарбитражные цены

В данном параграфе рынки уже не будут предполагаться полными. Остановленная случайная величина H_τ может рассматриваться как европейское платёжное обязательство, и множество безарбитражных цен для неё определяется по формуле

$$\Pi(H_\tau) = \{\mathrm{E}^* H_\tau : P^* \in \mathcal{M}(P),\ \mathrm{E}^* H_\tau < \infty\}. \tag{6.10}$$

Предположим, что дисконтированное американское обязательство предлагается в момент $t = 0$ по цене π. С точки зрения покупателя цена должна быть такой, что найдутся момент τ и $\pi' \geqslant \pi$ такие, что $\pi' \in \Pi(H_\tau)$. Иначе цена π будет слишком завышенной. С точки зрения продавца не должно быть момента τ' такого, что $\pi < \pi'$ для всех $\pi' \in \Pi(H_{\tau'})$. Тогда цена будет слишком заниженной.

Определение 6.17. Число $\pi \geqslant 0$ называется *безарбитражной ценой* обязательства H, если:

- существуют такие $\tau \in \mathcal{T}$ и $\pi' \in \Pi(H_\tau)$, что $\pi \leqslant \pi'$;
- не существует такого $\tau' \in \mathcal{T}$, что $\pi < \pi'$ для всех $\pi' \in \Pi(H_{\tau'})$.

Множество всех безарбитражных цен обозначим через $\Pi(H)$ и введём величины $\pi_{\inf}(H) = \inf \Pi(H)$ и $\pi_{\sup}(H) = \sup \Pi(H)$.

Из определения следует, что согласно формуле (6.10) для всякого $\pi \in \Pi(H)$ должны найтись $\tau \in \mathcal{T}$ и $P^* \in \mathcal{M}(P)$ такие, что $\pi = \mathrm{E}^* H_\tau$. Из второго условия в определении 6.17 следует, что $\pi \geqslant \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* H_\tau$ для всех $\tau \in \mathcal{T}$. Поэтому имеем неравенство

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* H_\tau \leqslant \pi \leqslant \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \sup_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* H_\tau \text{ для всех } \pi \in \Pi(H). \tag{6.11}$$

Далее нашей целью будет доказательство того факта, что границы в неравенстве (6.11) совпадают с $\pi_{\inf}(H)$ и $\pi_{\sup}(H)$. Предполагаем, что

$$H_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*) \text{ для всех } t,\ P^* \in \mathcal{M}(P). \tag{6.12}$$

Из (6.12) вытекает условие

$$\inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}^* H_\tau \leqslant \infty.$$

Пусть

$$U_t^{P^*} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathrm{E}^*(H_\tau | \mathcal{F}_t),$$

как и ранее (см. теорему 6.7), обозначает огибающую Снелла. Тогда правая граница в неравенстве (6.11) записывается в виде:

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \sup_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* H_\tau = \sup_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}^* H_\tau = \sup_{P^* \in \mathcal{M}(P)} U_0^{P^*}.$$

Аналогичная формула справедлива и для левой границы в (6.11):

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* H_\tau = \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}^* H_\tau = \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} U_0^{P^*}. \tag{6.13}$$

Если предположить, что перестановка sup и inf в (6.13) законна, то справедлива следующая теорема.

Теорема 6.18. *При условии* (6.13) *множество* $\Pi(H)$ *— это промежуток с концами* $\pi_{\inf}(H)$ *и* $\pi_{\sup}(H)$, *совпадающими соответственно с границами в неравенстве* (6.11). *Более того, либо множество* $\Pi(H)$ *состоит из одной точки, либо* $\pi_{\sup}(H) \notin \Pi(H)$.

Доказательство. Пусть τ^* — оптимальный момент остановки относительно P^*, т. е. $U_0^{P^*} = \mathrm{E}^* H_{\tau^*} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}^* H_\tau$. Значит, $U_0^{P^*} \in \Pi(H)$. Из оценок (6.11) и предположения (6.13) получаем включение

$$\left\{U_0^{P^*} : P^* \in \mathcal{M}(P)\right\} \subset \Pi(H) \subset [a, b], \tag{6.14}$$

где a и b — соответственные границы в неравенстве (6.11). Из предположения (6.13) и (6.14) вытекает, что $a = \pi_{\inf}(H)$ и $b = \pi_{\sup}(H)$. Множество $\{U_0^{P^*} : P^* \in \mathcal{M}(P)$ — промежуток. Действительно, пусть P_1, $P_2 \in \mathcal{M}(P)$ и $P_\alpha = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2$ для $\alpha \in [0,1]$. Тогда функция $f(\alpha) = U_0^{P^\alpha}$ по теореме 6.7 равна $\sup_{\tau \in \mathcal{T}} (\alpha \mathrm{E}^1 H_\tau + (1-\alpha)\mathrm{E}^2 H_\tau)$. Значит, она выпукла и полунепрерывна сверху. Из известных теорем анализа она даже непрерывна. Но т. к. $\mathcal{M}(P)$ выпукло, из сказанного следует, что $\Pi(H)$ тоже промежуток.

Осталось доказать второе утверждение. Пусть $a < b$ и $b \in \Pi(H)$. Тогда существуют такие $\hat\tau \in \mathcal{T}$ и $\hat P \in \mathcal{M}(P)$, что

$$\hat{\mathrm{E}} H_{\hat\tau} = b = \sup_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}^* H_\tau.$$

В частности, $\hat P$ доставляет максимум значению $\mathrm{E}^* H_{\hat\tau}$. По теореме 5.36 это возможно тогда и только тогда, когда обязательство $H_{\hat\tau}$ достижимо. Далее, из замечания 5.31 следует, что величина $\mathrm{E}^* H_{\hat\tau}$ вообще не зависит от P^*. Поэтому получаем противоречие:

$$b = \hat{\mathrm{E}} H_{\hat\tau} = \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* H_{\hat\tau} \leqslant \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{P^* \in \mathcal{M}(P)} \mathrm{E}^* H_\tau = a.$$

Таким образом, $b \notin \Pi(H)$. □

Левый конец промежутка $\Pi(H)$ может ему как принадлежать, так и не принадлежать.

Пример 6.19. Рассмотрим полный рынок на вероятностном пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$, и пусть $T = 2$, $n = 1$. Расширим основное пространство, полагая $\Omega = \Omega_0 \times \{a^-, a^+\}$ и $P([\omega_0; a^\pm]) = P_0(\omega_0)/2$. Тогда расширенный рынок уже не полон, и $\mathcal{M}(P) \supset \{P_p^* : p \in (0,1)\}$, где мера P_p^* однозначно определяется условием $P_p^*(\Omega_0 \times a^+) = p$ и P^* — единственная мартингальная мера на исходном пространстве. Рассмотрим обязательство H, которое задаётся как

$$H_0 \equiv 0,\ H_1 \equiv 1,\ H_2(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{если } \omega = [\omega_0; a^+], \\ 0, & \text{если } \omega = [\omega_0; a^-]. \end{cases}$$

Тогда $\tau_2 \equiv 2$ — оптимальный момент остановки для P_p^* при $p > 1/2$. Момент $\tau_1 \equiv 1$ оптимален при $p \leqslant 1/2$. Отсюда $\Pi(H) = [1, 2)$. Теперь изменим обязательство в момент $t = 1$, положив $H_1 \equiv 0$. Тогда $\Pi(H) = (0, 2)$.

В случае полного рынка имеем следствие 6.10. В соответствии с этим дадим следующее определение.

Определение 6.20. Дисконтированное американское обязательство H_t называется *достижимым*, если существуют момент остановки $\tau \in \mathcal{T}$ и самофинансируемая стратегия $\bar{\xi}_t$, для которой процесс стоимости V_t удовлетворяет условиям $V_t \geqslant H_t$ для всех t и $V_\tau = H_\tau$.

Стратегия $\bar{\xi}_t$ называется *хеджирующей* для H.

Теорема 6.21. *Для дисконтированного американского обязательства с условием* (6.12) *следующие условия эквивалентны:*

а) *обязательство H_t достижимо;*

б) *цена $\pi(H)$ является единственной безарбитражной для обязательства H_t, т. е. мы имеем $\Pi(H) = \{\pi(H)\}$;*

в)) $\pi_{\sup}(H) \in \Pi(H)$.

Более того, если обязательство достижимо, то его цена $\pi(H)$ равна начальному вложению любой стратегии, которая хеджирует H.

В этой теореме утверждения б) и в) эквивалентны согласно теореме 6.18. Остальная часть теоремы достаточно длинно доказывается в [7, §6.4, §6.5]. Некоторые соображения по этому поводу приводятся в следующей главе, замечание 7.5.

6.4. Дополнения и упражнения

Доказательство минимаксного равенства (6.13) требует некоторых дополнительных сведений.

Определение 6.22. Для момента остановки τ σ-алгебра событий, наблюдаемых до этого момента, определяется по формуле

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t\}.$$

Упражнение 6.23. Показать, что $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t\}$ и $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$, если $\tau(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$. Убедиться, что $\mathcal{F}_\tau$ действительно является σ-алгеброй.

В дополнение к упражнениям 6.5 и 5.22 верно следующее утверждение.

Утверждение 6.24. *Пусть M_t — такая согласованная случайная последовательность, что $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$. Тогда получаем эквивалентность следующих условий:*

а) *M_t — Q-мартингал;*

б) *$\mathrm{E}^Q(\mathcal{M}_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$ для всех $\tau \in \mathcal{T}$ и всех моментов σ.*

Доказательство. Из а) следует б). Берём $A \in \mathcal{F}_\sigma$ и запишем равенство

$$\mathrm{E}^Q(M_\tau; A) = \mathrm{E}^Q((M_\tau; A \cap \{\tau \leqslant \sigma\}) + \mathrm{E}^Q((M_\tau; A \cap \{\tau > \sigma\}).$$

В последнем математическом ожидании можем заменить M_τ на M_σ. Замечаем, что $A \cap \{\tau > \sigma\} \cap \{\sigma = t\} = A \cap \{\tau > t\} \cap \{\sigma = t\} \in \mathcal{F}_t$. Далее, т. к. остановленная последовательность является мартингалом, то

$$\mathrm{E}^Q(M_\tau; A \cap \{\tau > \sigma\}) = \sum_{t=0}^{T} \mathrm{E}^Q(M_T^\tau; A \cap \{\tau > \sigma\} \cap \{\sigma = t\}) =$$

$$= \sum_{t=0}^{T} \mathrm{E}^Q(M_t^\tau; A \cap \{\tau > \sigma\} \cap \{\sigma = t\}) = \mathrm{E}^Q(M_\sigma; A \cap \{\tau > \sigma\}).$$

В силу произвольности A получаем б). Чтобы доказать б)$\Rightarrow$f), достаточно положить $\tau \equiv t$ и $\sigma \equiv s \leqslant t$. □

Пример 6.25. В замечании 5.8 был определён процесс плотностей $Z_t = d\tilde{P}/dP|_{\mathcal{F}_t}$ для вероятностной меры $\tilde{P} \ll P$. Имеем $\tilde{P} \ll P$ на $\mathcal{F}_\sigma$ для любого момента остановки σ. Учитывая соотношение 5.13 и утверждение 6.24, получаем $d\tilde{P}/dP|_{\mathcal{F}_\sigma} = \mathrm{E}^P(Z_T|\mathcal{F}_\sigma) = Z_{T\wedge\sigma}$.

Поскольку $\mathrm{E}^Q(H_\sigma|\mathcal{F}_\tau) = \mathrm{E}^Q(H_\sigma|\mathcal{F}_t)$ Q-п.н. на $\{\tau = t\}$, то аналогично теореме 6.7 получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.26. *Рассматриваем согласованную последовательность H_t, удовлетворяющую условию (6.12), где P^* следует заменить на Q. Определяем множество $\mathcal{T}_\tau = \{\sigma \in \mathcal{T} : \sigma \geqslant \tau\}$. Тогда для огибающей Снелла U_t^Q получаем равенство*

$$U_\tau^Q = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma\in\mathcal{T}_\tau} \mathrm{E}^Q(H_\sigma|\mathcal{F}_\tau),$$

в котором существенный супремум достигается на случайном моменте $\sigma_{\min}^{(\tau)} = \min\{t \geqslant \tau : H_t = U_t^Q\}$.

Введём понятие *склейки* мер.

Определение 6.27. Пусть P и Q — две эквивалентные вероятностные меры на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ с фильтрацией $\mathcal{F}_t$, и задан момент остановки $\sigma \in \mathcal{T}$. Мера $\tilde{P}(A) = \mathrm{E}^P(Q(A|\mathcal{F}_\sigma))$, $A \in \mathcal{F}_T$, называется склейкой мер P и Q (в таком порядке) в случайный момент σ.

Упражнение 6.28. Проверить, что склейка является вероятностной мерой. Доказать, что $\mathrm{E}^{\tilde{P}}Y = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\sigma))$ для $\mathcal{F}_T$-измеримых случайных величин $Y \geqslant 0$. Более того, если величина Y $\mathcal{F}_\sigma$-измерима, то $\mathrm{E}^{\tilde{P}}Y = \mathrm{E}^P Y$.

Лемма 6.29. *Если $P \sim Q$, то склейка $\tilde{P} \sim P$ и плотность задаётся равенством $d\tilde{P}/dP = Z_T/Z_\sigma$, где Z_t — процесс плотностей меры P относительно Q (см. замечание 5.8).*

Доказательство. Для величины $Y \geqslant 0$ с помощью формулы (5.13) можем записать:

$$\mathrm{E}^{\tilde{P}}Y = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\sigma)) = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(YZ_T|\mathcal{F}_\sigma)/Z_\sigma) = \mathrm{E}^P(YZ_T/Z_\sigma).$$

Ввиду положительности величин Z_T и Z_σ по мере P получаем нужное утверждение. Мы также учитывали соотношение примера 6.25. $\square$

Лемма 6.30. *Пусть $\tilde{P}$ — склейка мер P и Q в момент $\sigma \in \mathcal{T}$. Тогда*

$$\mathrm{E}^{\tilde{P}}(Y|\mathcal{F}_\tau) = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau})|\mathcal{F}_\tau),$$

где τ — любой момент остановки и $Y \geqslant 0$ — любая $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина.

Доказательство. Вначале отметим, что произведение $\varphi I_{\{\tau\leqslant\sigma\}}$ является $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$-измеримой функцией, если $\varphi \geqslant 0$ — $\mathcal{F}_\tau$-измерима. Достаточно доказать это для произведения $I_A I_{\{\tau\leqslant\sigma\}}$. Ясно, что утверждение верно для $A = \Omega$. В общем случае получаем $A \cap \{\tau \leqslant \sigma\} \cap \{\sigma = t\} \in \mathcal{F}_t$ для всякого t, что и требуется. Далее получаем:

$$\mathrm{E}^{\tilde{P}}(Y\varphi; \tau \leqslant \sigma) = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\sigma)\varphi; \tau \leqslant \sigma) =$$
$$= \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\sigma)|\mathcal{F}_\tau)\varphi; \tau \leqslant \sigma) = \mathrm{E}^{\tilde{P}}(\mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\sigma)|\mathcal{F}_\tau)\varphi; \tau \leqslant \sigma),$$

где использован результат упражнения 6.28. С другой стороны,

$$\mathrm{E}^{\tilde{P}}(Y\varphi; \tau > \sigma) = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\tau)\varphi|\mathcal{F}_\sigma); \tau > \sigma) = \mathrm{E}^{\tilde{P}}(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\tau)\varphi; \tau > \sigma).$$

Складывая эти равенства, находим

$$\mathrm{E}^{\tilde{P}}(Y|\mathcal{F}_\tau) = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\sigma)|\mathcal{F}_\tau)I_{\{\tau\leqslant\sigma\}} + \mathrm{E}^Q(Y|\mathcal{F}_\tau)I_{\{\tau>\sigma\}}.$$

Полученное эквивалентно требуемому. $\square$

Определение 6.31. Множество $\mathcal{Q}$ эквивалентных мер на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ называется *устойчивым*, если склейка любых мер P, $Q \in \mathcal{Q}$ также содержится в $\mathcal{Q}$.

Утверждение 6.32. *Множество $\mathcal{M}(P)$ устойчиво.*

Доказательство. Пусть P, $Q \in \mathcal{M}(P)$ и $\tilde{P}$ — их склейка в момент $\sigma \in \mathcal{T}$. Применяем лемму 6.30 к $Y = X_t^i \geqslant 0$ и $\tau = s$:

$$\mathrm{E}^{\tilde{P}}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathrm{E}^P(\mathrm{E}^Q(X_t|\mathcal{F}_{\sigma\vee s})|\mathcal{F}_s) = \mathrm{E}^P(X_{t\wedge(\sigma\vee s)}|\mathcal{F}_s) = X_s.$$

В последнем равенстве мы дважды воспользовались пунктом б) утверждения 6.24. В частности, величина X_t интегрируема, т. к. $\mathrm{E}^{\tilde{P}} X_t = X_0$. □

Для согласованной и интегрируемой последовательности H_t и устойчивого множества $\mathcal{Q}$ введём *верхнюю и нижнюю огибающие Снелла*:

$$U_t^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} U_t^Q = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \mathrm{E}^Q(H_\tau|\mathcal{F}_t),\ t \in 0:T;$$

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{Q}} U_t^Q = \operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{Q}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \mathrm{E}^Q(H_\tau|\mathcal{F}_t),\ t \in 0:T.$$

Нижняя огибающая Снелла обладает следующим важным свойством.

Теорема 6.33. *Зададим момент остановки $\tau_t = \min\{u \geqslant t : U_u^{\downarrow} = H_u\}$. Выполняется равенство*

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(H_{\tau_t}|\mathcal{F}_t). \tag{6.15}$$

В частности,

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(H_\tau|\mathcal{F}_t) \text{ для всех } t, \tag{6.16}$$

где максимум по τ достигается на τ_t. Полагая $t = 0$, получаем:

$$U_0^{\downarrow} = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q H_\tau = \inf_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q H_{\tau_0}.$$

Доказательство. Для доказательства (6.15) заметим вначале, что $U_t^Q \geqslant \mathrm{E}^Q(H_{\tau_t}|\mathcal{F}_t)$ для всех $Q \in \mathcal{Q}$ в силу утверждения 6.26. Поэтому в (6.15) выполняется неравенство $\geqslant$. Для обратного замечаем, что $\tau_t \leqslant \min\{u \geqslant t : U_u^Q = H_u\} = \tau_t^Q$. В теореме 6.7 и утверждении 6.8 показано, что τ_t^Q — наименьший оптимальный момент остановки и остановленная последовательность U_t^{Q,τ_t^Q} является Q-мартингалом начиная с момента t. В частности,

$$U_t^Q = \mathrm{E}^Q(U_{\tau_t}^Q|\mathcal{F}_t) \text{ для всех } Q \in \mathcal{Q}. \tag{6.17}$$

В [7, лемма 6.50] показано, что существует последовательность мер $Q_k \in \mathcal{Q}$ такая, что $Q_k = Q$ на $\mathcal{F}_\tau$ и $U_\tau^{Q_k} \searrow \operatorname{ess\,inf}_{P\in\mathcal{Q}} U_\tau^P = U_\tau^{\downarrow}$. Также существует последовательность мер $Q^k \in \mathcal{Q}$ такая, что $Q^k = Q$ на $\mathcal{F}_\tau$ и $U_\tau^{Q^k} \nearrow \operatorname{ess\,sup}_{P\in\mathcal{Q}} U_\tau^P = U_\tau^{\uparrow}$.

Зафиксируем меру $Q \in \mathcal{Q}$. Берём последовательность $Q_k \in \mathcal{Q}$ такую, что $Q_k = Q$ на $\mathcal{F}_{\tau_t}$ и $U_{\tau_t}^{Q_k} \searrow U_{\tau_t}^{\downarrow}$. Получаем

$$\mathrm{E}^Q(H_{\tau_t}|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}^Q(U_{\tau_t}^{\downarrow}|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}^Q(\lim_{k\to\infty} U_{\tau_t}^{Q_k}|\mathcal{F}_t) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}^Q(U_{\tau_t}^{Q_k}|\mathcal{F}_t) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}^{Q_k}(U_{\tau_t}^{Q_k}|\mathcal{F}_t) = \lim_{k\to\infty} U_t^{Q_k} \geqslant U_t^1.$$

На третьем шаге использовали теорему о мажорированной сходимости и неравенство $H_{\tau_t} \leqslant U_{\tau_t}^{Q_k} \leqslant U_{\tau_t}^{Q_1}$. На четвертом шаге использовано равенство $Q_k = Q$ на $\mathcal{F}_{\tau_t} \supset \mathcal{F}_t$. Наконец, верно равенство (6.17). $\square$

Мы видим из теоремы 6.33, что минимаксное равенство (6.13) верно.

Для верхней огибающей Снелла предполагаем, что $\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q|H_t| \leqslant \infty$, $\forall t$.

Теорема 6.34. *Последовательность $U_t^{\uparrow}$ подчиняется рекуррентным соотношениям*

$$U_T^{\uparrow} = H_T \textit{ and } U_t^{\uparrow} = H_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(U_{t+1}^{\uparrow}|\mathcal{F}_t),\ t \in 0:T-1. \tag{6.18}$$

Некоторая характеризация устойчивости в следующей теореме.

Теорема 6.35. *Заданы множество $\mathcal{Q}$ эквивалентных мер и измеримая величина $H \geqslant 0$. Определим последовательность*

$$V_t^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(H|\mathcal{F}_t), \quad t \in 0:T,$$

где $V_0^{\uparrow} \leqslant \infty$. Тогда если множество $\mathcal{Q}$ устойчиво, то

$$V_\sigma^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(V_\tau^{\uparrow}|\mathcal{F}_\sigma),\ \forall \tau, \sigma \in \mathcal{T},\ \tau \geqslant \sigma.$$

Наоборот, пусть множество $\mathcal{Q}$ выпукло и совокупность плотностей $\{dQ/dP : Q \in \mathcal{Q}\}$ замкнута в $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ для $P \in \mathcal{Q}$. Тогда если соотношение

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q H = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(\operatorname*{ess\,sup}_{V\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^V(H|\mathcal{F}_\tau)) \tag{6.19}$$

выполняется для всех $\tau \in \mathcal{T}$ и $H \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, то множество $\mathcal{Q}$ устойчиво.

Доказательство. Вначале заметим, что

$$V_\tau^\uparrow = \sum_{t=0}^{T} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(H|\mathcal{F}_t) I_{\{\tau=t\}} = \sum_{t=0}^{T} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(H|\mathcal{F}_\tau) I_{\{\tau=t\}} = \\ = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(H|\mathcal{F}_\tau).$$

Значит, $V_\sigma^\uparrow = \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(H|\mathcal{F}_\sigma) = \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(\mathrm{E}^Q(H|\mathcal{F}_\tau)|\mathcal{F}_\sigma)$. Правая часть этого равенства совпадает с $\operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(V_\tau^\uparrow|\mathcal{F}_\sigma)$, поскольку, как указано в теореме 6.33, можем перейти к возрастающим последовательностям $U_\tau^{Q^k}$. Здесь используем факт, что последовательность $V_t^\uparrow$ — верхняя огибающая Снелла для процесса H_t с $H_T = H$ и $H_t = 0$ при $t < T$.

Вторая часть доказывается от противного. Пусть склейка $\tilde{Q}$ мер Q_1, Q_2 в момент $\tau \in \mathcal{T}$ не принадлежит $\mathcal{Q}$. По теореме Хана—Банаха (см. упражнение 5.16) найдётся величина $H \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, для которой $\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q H < \mathrm{E}^{\tilde{Q}} H$. Используя предположение (6.19), получим:

$$\mathrm{E}^{\tilde{Q}} H = \mathrm{E}^{Q_1}(\mathrm{E}^{Q_2}(H|\mathcal{F}_\tau)) \leqslant \mathrm{E}^{Q_1}(\operatorname*{ess\,sup}_{V\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^V(H|\mathcal{F}_\tau)) \leqslant \\ \leqslant \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q(\operatorname*{ess\,sup}_{V\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^V(H|\mathcal{F}_\tau)) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \mathrm{E}^Q H.$$

Получаем противоречие. □

Глава 7

Суперхеджирование

Здесь рассматриваем процесс нахождения самофинансируемой стратегии с минимальным начальным вложением, которая покрывала бы все расходы, связанные с продажей платёжного обязательства.

7.1. $\mathcal{P}$-супермартингалы

Рассмотрим NA-рынок и американское дисконтированное обязательство H_t с условием:

$$\sup_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^* H_t \leqslant \infty \text{ для всех } t. \tag{7.1}$$

Здесь и далее основная мера P фиксирована и $\mathcal{P} = \mathcal{M}(P)$.

Определение 7.1. Пусть $\mathcal{Q}$ — непустое множество, состоящее из вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Согласованная последовательность называется $\mathcal{Q}$-супермартингалом, если она является супермартингалом для каждой меры $Q \in \mathcal{Q}$. Аналогично определяются $\mathcal{Q}$-мартингалы и $\mathcal{Q}$-субмартингалы.

Примером $\mathcal{P}$-мартингала служит процесс стоимости в теореме 5.30.

Теорема 7.2. *Верхняя огибающая Снелла $U_t^{\uparrow}$ для H_t — это наименьший $\mathcal{P}$-мартингал, мажорирующий H_t.*

Доказательство. Ввиду равенства (6.18) имеем

$$U_t^{\uparrow} \geqslant H_t \vee \mathrm{E}^*(U_{t+1}^{\uparrow}|\mathcal{F}_t) \geqslant \mathrm{E}^*(U_{t+1}^{\uparrow}|\mathcal{F}_t).$$

Отсюда и из (7.1) получаем интегрируемость и супермартингальность $U_t^{\uparrow}$ по любой мере $P^* \in \mathcal{P}$.

Если $\tilde{U}_t$ — другой $\mathcal{P}$-супермартингал, мажорирующий H_t, то $\tilde{U}_T \geqslant H_T = U_T^{\uparrow}$. Если уже доказано, что $\tilde{U}_{t+1} \geqslant U_{t+1}^{\uparrow}$, то $\tilde{U}_t \geqslant H_t \vee \mathrm{E}^*(\tilde{U}_{t+1}|\mathcal{F}_t) \geqslant H_t \vee \mathrm{E}^*(\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow}|\mathcal{F}_t)$. Значит,

$$\tilde{U}_t \geqslant H_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^*(\tilde{U}_{t+1}^{\uparrow}|\mathcal{F}_t) = U_t^{\uparrow}.$$

□

Для европейского обязательства H^E получаем, что $\mathcal{P}$-супермартингал с конечным значением

$$V_t^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^*(H^E|\mathcal{F}_t)$$

является наименьшим супермартингалом, превышающим H^E. Отметим также, что на месте $\mathcal{P}$ в теореме 7.2 могло бы быть любое множество $\mathcal{Q}$ эквивалентных вероятностных мер.

В суперхеджировании ключевую роль играет равномерное разложение Дуба, о котором идёт речь в следующей теореме.

Теорема 7.3. *Пусть $U_t \geqslant 0$ — согласованная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *U_t — $\mathcal{P}$-супермартингал;*

б) *существуют согласованная неубывающая последовательность B_t, $B_0 = 0$, и n-мерная предсказуемая последовательность ξ_t такие, что*

$$U_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot \Delta X_k - B_t \ P\text{-п.н. для всех } t.$$

Доказательство. Из б) следует а). Зафиксируем $P^* \in \mathcal{P}$ и заметим, что $V_T = U_0 + \sum_{k=1}^{T} \xi_k \cdot \Delta X_k \geqslant U_T \geqslant 0$. По теореме 5.10 V_t — $\mathcal{P}$-мартингал. Значит, $U_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*)$ и, более того, $\mathrm{E}^*(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \mathrm{E}^*(V_{t+1} - B_{t+1}|\mathcal{F}_t) \leqslant \leqslant V_t - B_t = U_t$ для всех t.

Доказательство а)$\Rightarrow$б) проводится аналогично доказательству теоремы 5.36. Следует показать, что $\Delta U_t = \xi_t \cdot \Delta X_t - R_t$ для некоторых $\xi_t \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^n)$ и $R_t \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Это условие записывается как $\Delta U_t \in \mathcal{K}_t - L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, где конус $\mathcal{K}_t$ определён в формуле (5.10). $\square$

7.2. Суперхеджирование для американских и европейских обязательств

Начнём с того, что условие (7.1) эквивалентно ограниченности верхней границы $\pi_{\sup}(H) = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}^* H_\tau < \infty$.

Определение 7.4. Самофинансируемая стратегия $\bar{\xi}_t$ с процессом стоимости $V_t \geqslant H_t$ P-п.н. для всех t называется *суперхеджирующей стратегией* для H_t.

Согласно определению 6.20 обязательство H_t достижимо тогда и только тогда, когда существуют момент $\tau \in \mathcal{T}$ и стратегия ξ_t такие, что $V_\tau = H_\tau$. Если обязательство H_t недостижимо, то $P(V_t > H_t, \forall t) > 0$. Действительно, пусть $\tau = \inf\{t \geqslant 0 : H_t = V_t\}$. Тогда $P(\tau = \infty) = P(V_t > H_t, \forall t)$. Если предположить, что $P(\tau = \infty) = 0$, то $V_\tau = H_\tau$, и это противоречие с недостижимостью.

Для единственной эквивалентной мартингальной меры P^* в модели полного рынка выше было использовано разложение Дуба для огибающей Снелла $U_t^{P^*}$ обязательства H_t наряду с мартингальным представлением из теоремы 5.40. Также было показано, что $U_0^{P^*}$ — минимальное вложение, для которого доступна суперхеджирующая стратегия. К тому же $U_0^{P^*}$ — единственная безарбитражная цена для H_t. Аналогична ситуация и на неполном рынке. Используются верхняя огибающая Снелла $U_t^{\uparrow}$ и равномерное разложение Дуба. Равномерное разложение Дуба для $U_t^{\uparrow}$ принимает вид:

$$U_t^{\uparrow} = U_0^{\uparrow} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot \Delta X_k - B_t \geqslant H_t. \tag{7.2}$$

Таким образом, самофинансируемая стратегия $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$, определяемая стратегией ξ_t и начальным капиталом $\bar{\xi}_1 \cdot \bar{X}_0 = U_0^{\uparrow} = \pi_{\sup}(H)$, является суперхеджирующей стратегией для H_t. Более того, для любого процесса стоимости $\tilde{V}_t$, как указано сразу после определения 7.4, имеем $\tilde{V}_0 > \mathrm{E}^* H_\tau$, откуда $\tilde{V}_0 \geqslant \pi_{\sup}(H)$.

Величина $\pi_{\sup}(H)$ называется *затратами на суперхеджирование.*

Замечание 7.5. Предположим, что $\pi_{\sup}(H) \in \Pi(H)$. Из теоремы 6.18 заключаем, что $\pi_{\sup}(H)$ — единственный элемент множества $\Pi(H)$. По определению этого множества найдутся $\tau \in \mathcal{T}$ и $P^* \in \mathcal{P}$ такие, что $\pi_{\sup}(H) = \mathrm{E}^* H_\tau$. Пусть V_t — процесс стоимости с $V_0 = \pi_{\sup}(H)$. Отсюда $\mathrm{E}^* V_\tau = \pi_{\sup}(H)$ и $V_\tau = H_\tau$ P-п.н., т. е. обязательство H_t достижимо в смысле определения 6.20. Заметим, что это наблюдение доказывает теорему 6.21.

Можно рассматривать нахождение наименьшей суммы для суперхеджирования в моменты $t \geqslant 0$. Введём множество $\mathcal{U}_t^{\uparrow}(H)$, состоящее из $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин $U_t \geqslant 0$, для которых существует предсказуемый процесс ξ_t такой, что

$$U_t + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k \cdot \Delta X_k \geqslant H_u \text{ для всех } u \geqslant t \; P\text{-п.н.} \tag{7.3}$$

В [7, теорема 7.13] доказано, что $U_t^{\uparrow} \in \mathcal{U}_t^{\uparrow}(H)$ и $U_t^{\uparrow} = \operatorname{ess\,inf} \mathcal{U}_t^{\uparrow}(H)$. С точки зрения покупателя, надо найти $\tau \in \mathcal{T}$ и самофинансируемую стратегию с процессом стоимости V_t такие, что $V_0 = -\pi$ и $V_\tau + H_\tau \geqslant 0$, где π — начальные затраты. Максимальное значение затрат $\pi_{\inf}(H) = U_0^{\downarrow}$, где $U_t^{\downarrow}$ — нижняя огибающая Снелла относительно устойчивого множества $\mathcal{P}$. Для произвольного момента $T \geqslant 0$ определим множество $\mathcal{U}_t^{\downarrow}(H)$, состоящее из

$\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин $U_t \geqslant 0$, для которых существует предсказуемый процесс η_t и момент $\sigma \in \mathcal{T}_t$ такие, что

$$U_t - \sum_{k=t+1}^{\sigma} \eta_k \cdot \Delta X_k \leqslant H_\sigma \ P\text{-п.н.} \tag{7.4}$$

В [7, теорема 7.14] доказано, что $U_t^{\downarrow} \in \mathcal{U}_t^{\downarrow}(H)$ и $U_t^{\downarrow} = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{U}_t^{\downarrow}(H)$.

Упражнение 7.6. Переформулировать результаты данного раздела для европейских обязательств. В частности, показать, что существуют предсказуемые процессы ξ_t и η_t такие, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^*(H^E|\mathcal{F}_t) + \sum_{k=t+1}^{T} \xi_k \cdot \Delta X_k \geqslant H^E, \tag{7.5}$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^*(H^E|\mathcal{F}_t) - \sum_{k=t+1}^{T} \eta_k \cdot \Delta X_k \leqslant H^E. \tag{7.6}$$

Замечание 7.7. Для $t = 0$ неравенство (7.5) принимает вид

$$\sup_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^* H^E + \sum_{k=1}^{T} \xi_k \cdot \Delta X_k \geqslant H^E \ P\text{-п.н.}$$

Самофинансируемая стратегия $\bar{\xi}_t$, составленная из ξ_t и начального вложения $\bar{\xi}_1 \cdot \bar{X}_0 = \sup_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^* H^E$, позволяет продавцу покрыть выплаты без убытка. Неравенство (7.6) определяет самофинансируемую стратегию $\bar{\eta}_t$, составленную из η_t и начального вложения $\bar{\eta}_1 \cdot \bar{X}_0 = -\inf_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^* H^E$. Последняя величина равна наибольшей сумме, которую покупатель может взять в долг для того, чтобы, получив выплату H^E, вернуть долг.

Рассмотрим пример, показывающий недостатки, т. е. дороговизну суперхеджирующей стратегии.

Пример 7.8. Вернёмся к примеру 4.12. Пусть $H = (d - K)^+$ — опцион покупки с $\pi = 1$ и $r = 0$. Было показано, что $\pi_{\inf}((d - K)^+) = (1 - K)^+$ и достигается на мере $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ с плотностью $d\tilde{P}/dP = eI\{d = 1\}$. Кроме того, $\pi_{\sup}((d - K)^+) = 1$. Следовательно, суперхеджирующая стратегия продавца $\xi_1 = 1$ обеспечивает неравенство (7.5) при $t = 0$, $T = 1$, $n = 1$, но левая часть, равная d, может быть достаточно большой при больших K, хотя правая часть равна нулю. Суперхеджирующая стратегия покупателя $\eta_1 = (1 - K)^+$ обеспечивает соответствующее неравенство с левой частью, равной $d(1 - K)^+$, что тоже может оказаться значительной суммой при $0 < K < 1$.

7.3. Об эффективном хеджировании

Рассмотрим европейское платёжное обязательство $H = H_T$, $H_t = 0$ для $t < 0$, с условием (7.1). В предыдущем пункте было отмечено существование процесса стоимости $V_t^{\uparrow}$ такого, что $V_T^{\uparrow} \geqslant H$. Наименьшая сумма приобретения такой суперхеджирующей стратегии равна $\pi_{\sup}(H)$. Эта цена практически может оказаться достаточно большой.

Построим более гибкий способ хеджирования. Зафиксируем число $v < \pi_{\sup}(H)$. Будем искать стратегию с начальным вложением $V_0 \leqslant v$, неотрицательным процессом стоимости V_t и максимальной вероятностью $P(V_T \geqslant H)$.

Определение 7.9. Самофинансируемая стратегия называется *допустимой*, если её процесс стоимости подчиняется условию $V_T \geqslant 0$.

Рассматривается задача *квантильного хеджирования*:

$$P(V_T^* \geqslant H) = \max P(V_T \geqslant H),\ V_0 \leqslant v < \pi_{\sup}(H). \tag{7.7}$$

Здесь максимум ищется по всем допустимым стратегиям и соответствующим стоимостям. Ограничимся случаем полного рынка.

Утверждение 7.10. *Пусть множество $A^* \in \mathcal{F}_T$ имеет наибольшую вероятность $P(A)$ среди множеств с ограничением*

$$\mathrm{E}^*(HI_A) \leqslant v. \tag{7.8}$$

Тогда стратегия $\bar{\xi}_t$, реплицирующая опцион $H^* = HI_{A^*}$, является решением задачи (7.7), а $A^* = \{V_T^* \geqslant H\}$. Далее множество типа $\{V_T \geqslant H\}$ называется множеством успешности.

Доказательство. Пусть V_t — процесс стоимости допустимой стратегии с условием $V_0 \leqslant v$. Обозначим множество успешности $\{V_T \geqslant H\}$ через A. Тогда $V_T \geqslant HI_A$. Из теорем 5.10, 5.30 следует, что V_t — P^*-мартингал. Поэтому $\mathrm{E}^*(HI_A) \leqslant \mathrm{E}^* V_T = V_0 \leqslant v$. Выполняются условия (7.8), и значит, $P(A) \leqslant P(A^*)$.

Далее, согласно определению 5.29 рассмотрим реплицирующую стратегию $\bar{\xi}_t$ и её процесс V_t^*. Множество успешности удовлетворяет соотношениям $\{V_T^* \geqslant H\} = \{HI_{A^*} \geqslant H\} \supset A^*$. С другой стороны, было показано, что $P(V_T^* \geqslant H) \leqslant P(A^*)$. Значит, множества A^* и $\{V_T^* \geqslant H\}$ имеют одинаковую P-вероятность. Стратегия $\bar{\xi}_t$ оптимальна. $\square$

Для произвольных вероятностных мер P, Q справедливо разложение Лебега:

$$P(A) = P(A \cap N) + \int_A \varphi dQ,\ \forall A \in \mathcal{F},\ Q(N) = 0,$$

для некоторых $\mathcal{F}$-измеримой функции $\varphi \geqslant 0$ и множества $N \in \mathcal{F}$. Функция φ называется *обобщённой плотностью* меры P относительно Q.

Лемма (Неймана — Пирсона). *Если множество $A \in \mathcal{F}$ таково, что $Q(A) \leqslant Q(A^0)$, где $A^0 = \{\varphi > c\}$, то $P(A) \leqslant P(A^0)$. Здесь φ — функция из разложения Лебега, $\varphi = \infty$ на N.*

Доказательство. Если $F = I_{A^0} - I_A$, то $F \geqslant 0$ на N, поскольку $N \subset A^0$. Кроме того, $F(\varphi - c) \geqslant 0$. Поэтому

$$P(A^0) - P(A) = \int FdP = \int_N FdP + \int F\varphi dQ \geqslant c\int FdQ = c(Q(A^0)- -Q(A)),$$

что и требовалось установить. □

Теперь можем построить множество A^* из утверждения 7.10. Определим меру Q^* с плотностью

$$dQ^*/dP^* = H/\mathrm{E}^*H. \tag{7.9}$$

Тогда ограничение (7.8) запишем в виде:

$$Q^*(A) \leqslant \alpha = v/\mathrm{E}^*H. \tag{7.10}$$

Пусть φ — обобщённая плотность меры P относительно Q^*. Определим уровень

$$c^* = \inf\{c \geqslant 0 : Q^*(\varphi > c\mathrm{E}^*H) \leqslant \alpha\} \tag{7.11}$$

и множество

$$A^* = \{\varphi > c^*\mathrm{E}^*H\} = \{dP/dP^* > c^*H\}. \tag{7.12}$$

В формулах (7.9)–(7.12) P — основная мера на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, а P^* — единственная мартингальная эквивалентная мера. В силу равенства $\int_A (dP/dP^*/H- -\varphi/\mathrm{E}^*H)dQ^* = \int_A (dP/dP^* - \varphi H/\mathrm{E}^*H)dP^*/\mathrm{E}^*H = P(A \cap N)/\mathrm{E}^*H$ мы видим, что функции под первым интегралом совпадают Q^*-п.н. на N^c.

Утверждение 7.11. *Если $Q^*(A^*) = \alpha$, то множество A^* имеет наибольшую вероятность $P(A)$ среди всех множеств $A \in \mathcal{F}_T$ с ограничением (7.8).*

Доказательство. Ограничение (7.8) является эквивалентным неравенству (7.10). Поэтому $Q(A) \leqslant Q(A^*)$, и из леммы Неймана — Пирсона следует $P(A) \leqslant P(A^*)$. □

К сожалению, предположение утверждения 7.11 не всегда выполняется. Поэтому используют обобщённую лемму Неймана — Пирсона. Напомним понятие λ-квантили: число q, для которого $P(X \leqslant q) \geqslant \lambda$ и $P(X < q) \leqslant \lambda$, называется λ-квантилью случайной величины X.

Лемма 7.12 (обобщённая лемма Неймана—Пирсона)**.** *Пусть $\mathcal{R}$ — множество $\mathcal{F}$-измеримых функций $\psi : \Omega \to [0,1]$. Пусть $\Pi = (P+Q)/2$ и φ — обобщённая плотность меры P относительно Q. Тогда:*

а) *если функция $\psi^0 \in \mathcal{R}$ определена равенством*

$$\psi^0 = \begin{cases} 1, & \text{на } \{\varphi > c\}, \\ 0, & \text{на } \{\varphi < c\}, \end{cases} \quad \Pi\text{-п.н.}, \tag{7.13}$$

то для всех $\psi \in \mathcal{R}$ выполняется импликация

$$\int \psi dQ \leqslant \int \psi^0 dQ \Rightarrow \int \psi dP \leqslant \int \psi^0 dP; \tag{7.14}$$

б) *для любого $\alpha_0 \in (0,1)$ существует такая функция $\psi^0 \in \mathcal{R}$ вида* (7.13)*, что $\int \psi^0 dQ = \alpha_0$; более того, если c является* $(1-\alpha_0)$-*квантилью φ по мере Q, то ψ^0 определяется как $\psi^0 = I_{\{\varphi > c\}} + \varkappa I_{\{\varphi = c\}}$, где*

$$\varkappa = \begin{cases} 0, & \text{если } Q(\varphi = c) = 0, \\ \dfrac{\alpha_0 - Q(\varphi > c)}{Q(\varphi = c)} & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

в) *любая функция $\psi^0 \in \mathcal{R}$, удовлетворяющая импликации* (7.14)*, имеет вид* (7.13) *для некоторого c.*

Доказательство. Доказываем а). Полагаем $F = \psi^0 - \psi$. Далее дословно повторяем рассуждения при доказательстве леммы Неймана—Пирсона.

Докажем б). Пусть $F(x) = Q(\varphi \leqslant x)$ — функция распределения φ по мере Q. Тогда $Q(\varphi > c) = 1 - F(c) \leqslant \alpha_0$, откуда получаем:

$$Q(\varphi = c) = F(c) - F(c-) \geqslant F(c) - 1 + \alpha_0 = \alpha_0 - Q(\varphi > c).$$

Следовательно, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, и $\psi^0 \in \mathcal{R}$. Используя квантильность c, непосредственно проверяем равенство $\int \psi^0 dQ = \alpha_0$.

Докажем в). Пусть выполняется импликация (7.14) для функции ψ^*, если её подставить вместо ψ^0. Если $\alpha_0 = \int \psi^* dQ \in (0,1)$, то берём ψ_0 из б). Тогда тоже $\alpha_0 = \int \psi^0 dQ$. Кроме того, $\int \psi^* dQ = \int \psi^0 dQ$, что следует из (7.14), если поменять местами ψ^* и ψ^0. Итак, для $F = \psi^0 - \psi^*$ и $N = \{\varphi = \infty\}$ имеем равенство $0 = \int F dP - c \int F dQ = \int_N F dP + \int F(\varphi - c) dQ$. Но $F \geqslant 0$ P-п.н. на N и $F(\varphi - c) \geqslant 0$ Q-п.н. Получаем, что $F = 0$ Π-п.н. на множестве $\varphi \neq c$. $\square$

Теперь рассмотрим более общую задачу оптимизации:

$$\mathrm{E}\psi^* = \max\{\mathrm{E}\psi : \psi \in \mathcal{R},\ \mathrm{E}^{Q^*}\psi \leqslant \alpha\},$$

где мера Q^* определена равенством (7.9), а значение α взято из формулы (7.10). Из леммы 7.12 получаем решение:

$$\psi^* = I_{\{dP/dP^*>c^*H\}} + \gamma I_{\{dP/dP^*=c^*H\}}, \tag{7.15}$$

где c^* определено в (7.11), а γ выбрано так, что

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{если } P(dP/dP^* = c^*H) = 0, \\ \dfrac{\alpha_0 - Q^*(dP/dP^* > c^*H)}{Q^*(dP/dP^* = c^*H)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение 7.13. Пусть V_t — процесс стоимости допустимой стратегии $\bar{\xi}_t$. Определим *отношение успешности* как функцию $\psi_V = I_{\{V_T \geqslant H\}} + V_T I_{\{V_T<H\}}/H$.

Имеем равенство $\{\psi_V = 1\} = \{V_T \geqslant H\}$. Мы ищем стратегию, максимизирующую $\mathrm{E}\psi_V$ при ограничении $V_0 \leqslant v$.

Теорема 7.14. *Пусть* ψ^* *задано равенством* (7.15)*, а* $\bar{\xi}_t$ *— стратегия дисконтированного обязательства* $H^* = H\psi^*$*. Тогда отношение успешности* ψ_{V^*} *для стратегии* $\bar{\xi}_t$ *максимизирует* $\mathrm{E}\psi_V$ *по всем допустимым стратегиям с ограничением* $V_0 \leqslant v$*. Более того, имеем равенство* $\psi_{V^*} = \psi^*$ *P-п.н.*

Для неполных рынков существует такой рандомизируемый максимизирующий критерий ψ^*, что $\sup_{P^*\in\mathcal{P}} \mathrm{E}^*(H\psi^*) = v$. При этом ψ^* максимизирует $\mathrm{E}\psi$ среди всех $\psi \in \mathcal{R}$ с ограничением $\mathrm{E}^*(H\psi^*) \leqslant v$ для всех $P^* \in \mathcal{P}$. Подробнее на этом не останавливаемся.

Упражнение 7.15. Рассмотреть опционы покупки и продажи $H = (d_T - K)^+$ и $H = (K - d_T)^+$ на биномиальном рынке параграфа 5.6. Существует ли для них максимальное множество из утверждений 7.10 и 7.11?

Глава 8

Сходимость к цене Блэка — Шоулса

В данной главе T означает момент времени. Отрезок $[0, T]$ разбивается на N равноотстоящих шагов tT/N, $t \in 0 : N$. Предполагаем, что для каждого N на рынке имеется безрисковая облигация с постоянной процентной ставкой $r_N > -1$ и один рисковый актив $d_t^{(N)}$.

8.1. Обоснование сходимости

Для сходимости предполагаем, что r_N — бесконечно малая величина, причём $\lim_{N\to\infty} Nr_N = rT$. Тогда $\lim_{N\to\infty}(1 + r_N)^N = e^{rT}$. Наоборот, если последний предел существует, то последовательность Nr_N обязана сходиться к некоторому пределу, который и обозначается как rT.

Перейдём к рисковому активу. Полагаем $d_0^{(N)} = d_0 > 0$, где d_0 не зависит от N. Цены $d_t^{(N)}$ заданы на вероятностном пространстве $(\Omega_N, \mathcal{F}^{(N)}, P_N^*)$, где P_N^* — риск-нейтральная мера, т. е. каждый дисконтированный процесс $X_t^{(N)} = d_t^{(N)}/(1 + r_N)^t$ для $t \in 0 : N$ является P_N^*-мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t^{(N)} = \sigma(d_1^{(N)}, \ldots, d_t^{(N)})$. Введём нормы прибыли $R_t^{(N)} = \Delta d_t^{(N)}/d_{t-1}^{(N)}$, $t \in 1 : N$. Предполагаем, что величины $R_t^{(N)}$, $t \in 1 : N$, независимы в совокупности по мере P_N^* и удовлетворяют условию

$$-1 < \alpha_N \leqslant R_t^{(N)} \leqslant \beta_N,\ t \in 1 : N, \quad \lim_{N\to\infty} \alpha_N = \lim_{N\to\infty} \beta_N = 0,$$

где α_N, β_N — константы. Кроме того, предполагается, что

$$\sigma_N^2 = \sum_{t=1}^{N} \mathrm{D}_N R_t^{(N)}/T \to \sigma^2 \in (0, \infty).$$

Для дальнейшего потребуются формулировки центральной предельной теоремы и теоремы Слуцкого, доказательства которых можно найти в учебниках [4, 5].

Теорема (центральная предельная)**.** *Пусть для любого $N \in \mathbb{N}$ на пространстве $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$ заданы N независимых случайных величин $Y_1^{(N)}$, $\ldots, Y_N^{(N)}$, которые удовлетворяют условиям:*

- *существуют $\gamma_N \to 0$ такие, что $|Y_t^{(N)}| \leqslant \gamma_N$ P_N-п.н.;*
- $\sum_{t=1}^{N} \mathrm{E}_N Y_t^{(N)} \to m$*;*
- $\sum_{t=1}^{N} \mathrm{D}_N Y_t^{(N)} \to \sigma^2$.

Тогда распределение суммы $Z_N = \sum_{t=1}^N Y_t^{(N)}$ *слабо сходится к нормальному распределению* $N(m, \sigma^2)$. *Иначе говорят (см. [9]), что величина* Z_N *сходится по распределению к гауссовской величине* Z *с параметрами* m, σ^2. *Это обозначается как* $Z_N \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$.

Теорема (Слуцкого). *Пусть для любого* $N \in \mathbb{N}$ *на пространстве* $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$ *заданы случайные величины* X_N, Y_N *такие, что* $X_N \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *где* X *— некоторая случайная величина, а распределение* Y_N *слабо сходится к мере Дирака* δ_y, $y \in \mathbb{R}$, *т. е.* $Y_N \xrightarrow{\mathcal{D}} y$. *Тогда:*

а) $X_N + Y_N \xrightarrow{\mathcal{D}} X + y$;

б) $X_N Y_N \xrightarrow{\mathcal{D}} Xy$.

Теперь можем сформулировать теорему о сходимости.

Теорема 8.1. *При сделанных предположениях распределение величины* $d_N^{(N)}$ *по мере* P_N^* *слабо сходится к распределению случайной величины*

$$d_T = d_0 \exp\left(\sigma W_T + (r - \sigma^2/2)T\right), \qquad (8.1)$$

где W_T *имеет нормальное распределение* $N(0, T)$, *т. е.* $d_N^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{D}} d_T$.

Доказательство. Пусть $d_0 = 1$, не ограничивая общности. Запишем формулу Тейлора $\log(1 + x) = x - x^2/2 + \rho(x)x^2$, где $|\rho(x)| \leqslant \delta(\alpha, \beta)$ при $\delta(\alpha, \beta) \to 0$ для $\alpha, \beta \to 0$ и $-1 < \alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Применяя разложение к $d_N^{(N)} = \prod_{t=1}^N (1 + R_t^{(N)})$, получим

$$\log d_N^{(N)} = \sum_{t=1}^N \left(R_t^{(N)} - \left(R_t^{(N)}\right)^2/2\right) + \Delta_N,$$

где $|\Delta_N| \leqslant \delta(\alpha_N, \beta_N) \sum_{t=1}^N \left(R_t^{(N)}\right)^2$. В силу мартингальности имеем равенство $\mathrm{E}_N^* R_t^{(N)} = r_N$, откуда следует:

$$\mathrm{E}_N^* |\Delta_N| \leqslant \delta(\alpha_N, \beta_N) \sum_{t=1}^N (\mathrm{D}_N R_t^{(N)} + r_N^2) \to 0.$$

В частности, $|\Delta_N| \to 0$ по вероятности и $|\Delta_N| \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

Рассмотрим сумму

$$Z_N = \sum_{t=1}^N \left(R_t^{(N)} - \left(R_t^{(N)}\right)^2/2\right) = \sum_{t=1}^N Y_t^{(N)}$$

и покажем, что её распределение сходится к закону $N(rT - \sigma^2 T/2, \sigma^2 T)$. Действительно,

$$\max_{t\in 1:N} |Y_t^{(N)}| \leqslant |\gamma_N| + \gamma_N^2/2 \to 0$$

для $\gamma_N = \alpha_N \vee \beta_N$ и

$$\mathrm{E}_N^* Z_N = N r_N - (\sigma_N^2 T + N r_N^2)/2 \to rT - \sigma^2 T/2.$$

Кроме того, $\mathrm{D}_N Z_N \to \sigma^2 T$. Это следует из того, что при $p \geqslant 3$

$$\sum_{t=1}^{N} \mathrm{E}_N^* |R_t^{(N)}|^p \leqslant |\gamma_N|^{p-2} \sum_{t=1}^{N} \mathrm{E}_N^* \big(R_t^{(N)}\big)^2 \to 0.$$

По центральной предельной теореме получаем требуемое. □

Пример 8.2. Пусть на N-м этапе мы имеем дело с биномиальным рынком с процентной ставкой $r_N = rT/N$ и нормой прибыли $R_t^{(N)} \in \{a_N, b_N\}$. Предположим, что

$$\hat{a}_N = 1 + a_N = e^{-\sigma\sqrt{T/N}},\ \hat{b}_N = 1 + b_N = e^{\sigma\sqrt{T/N}},\ \sigma > 0.$$

Тогда

$$\sqrt{N} r_N \to 0,\ \sqrt{N} a_N \to -\sigma\sqrt{T},\ \sqrt{N} b_N \to \sigma\sqrt{T} \text{ при } N \to \infty. \tag{8.2}$$

Для достаточно больших N имеем $a_N < r_N < b_N$, и существует единственная эквивалентная мартингальная мера P_N^*, для которой

$$P_N^*(R_t^{(N)} = b_N) = p_N^* = (r_N - a_N)/(b_N - a_N).$$

Переходя здесь к пределу, в силу (8.2) получаем $\lim_{N\to\infty} p_N^* = 1/2$. Кроме того, $\mathrm{E}_N^* R_t^{(N)} = r_N$, следовательно, опять в силу (8.2) находим:

$$\sum_{t=1}^{N} \mathrm{D}_N R_t^{(N)} = N(p_N^* b_N^2 + (1 - p_N^*) a_N^2 - r_N^2) \to \sigma^2 T$$

при $N \to \infty$. Все условия теоремы 8.1 выполнены.

Рассмотрим производную ценную бумагу вида $C^{(N)} = f(d_N^{(N)})$, где $f \geqslant 0$ — ограниченная непрерывная функция. Поскольку сходимость по распределению $d_N^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{D}} d_T$ эквивалентна сходимости $\mathrm{E}_N^* f(d_N^{(N)}) \to \mathrm{E}^* f(d_T)$ для всех непрерывных и ограниченных функций, то получаем следствие.

Следствие 8.3 (теоремы 8.1)**.** *Безарбитражные цены дисконтированного обязательства $C^{(N)}$ сходятся к цене Блэка — Шоулса:*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_N^* \frac{C^{(N)}}{(1 + r_N)^N} = \frac{\mathrm{E}^* f(d_T)}{e^{rT}} = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int f\left(d_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{8.3}$$

Здесь d_T имеет вид (8.1) *относительно меры P^*.*

В частности, пусть $f(x) = (K - x)^+$. Тогда, поскольку для опционов имеет место паритет $C^{\mathrm{call}} - C^{\mathrm{put}} = x - K$ (см. пример 5.35), имеет место равенство

$$\mathrm{E}_N^* \frac{(d_N^{(N)} - K)^+}{(1 + r_N)^N} = \mathrm{E}_N^* \frac{(K - d_N^{(N)})^+}{(1 + r_N)^N} + d_0 - \frac{K}{(1 + r_N)^N}.$$

Следовательно, сходимость (8.3) имеет место и для call-опциона с неограниченной функцией f.

Пример 8.4. Найдём предельную цену call-опциона $C^{(N)} = (d_N^{(N)} - K)^+$. Эта цена равна $v(d_0, T)$, где

$$v(x, T) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int \left(x e^{\sigma\sqrt{T} y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K \right)^+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Подынтегральная функция равна нулю, когда

$$y \leqslant -\frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -s_-(x, T) = -s_-.$$

Введём ещё величину $s_+ = s_+(x, T) = s_-(x, T) + \sigma\sqrt{T}$ и функцию распределения $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy / \sqrt{2\pi}$. Тогда с учётом равенства $1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$ получаем формулу Блэка—Шоулса для цены европейского call-опциона с датой погашения T:

$$v(x, T) = x\Phi(s_+(x, T)) - e^{-rT} K \Phi(s_-(x, T)). \tag{8.4}$$

Упражнение 8.5. Построить в MatLab график функции (8.4). Использовать стандартную функцию normcdf(x)=erfc(-x/sqrt(2))/2 из MatLab.

Замечание 8.6. Формула (8.4) позволяет вычислить пределы цены опциона при $\sigma \to \infty$ и $\sigma \to 0$. В первом случае получаем x, а во втором $(x - e^{-rT} K)^+$. Это верхняя и нижняя арбитражные границы, как в замечании 4.11.

На самом деле сходимость (8.3) имеет место даже для разрывных функций в следующих ситуациях.

Теорема (7, предложение 5.59)**.** *Пусть $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, непрерывная почти всюду по мере Лебега и $|f(x)| \leqslant c(1 + x)^q$, где $c > 0$, $0 \leqslant q < 2$. Тогда $\mathrm{E}_N^* f(d_N^{(N)}) \to \mathrm{E}^* f(d_T)$, где d_T имеет вид* (8.1) *относительно меры P^*.*

Доказательство. Доказательство основано, как в теореме 8.1, на формуле Тейлора

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + \rho(x)x^2$$

и оценке

$$\log \mathrm{E}_N^* \left(d_N^{(N)}\right)^2 = \log \prod_{t=1}^{N} \left(\mathrm{D}_N\bigl(1+R_t^{(N)}\bigr) + \bigl(\mathrm{E}_N^*\bigl(1+R_t^{(N)}\bigr)\bigr)^2\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{N} \log\left(\mathrm{D}_N R_t^{(N)} + (1+r_N)^2\right) \leqslant \sum_{t=1}^{N} \mathrm{D}_N R_t^{(N)} + N r_N^2 + 2N r_N \leqslant \tilde{c}$$

для некоторого $\tilde{c}$ в силу предположений. Здесь использовано неравенство $\log(1+x) \leqslant x$. Поэтому $\sup\limits_N \mathrm{E}_N^* \left(d_N^{(N)}\right)^2 < \infty$. Согласно предположениям теоремы при $p = 2/q > 1$ имеем:

$$\sup_N \mathrm{E}_N^* \left| f\left(d_N^{(N)}\right)\right|^p \leqslant c^p \sup_N \mathrm{E}_N^* \left(1 + d_N^{(N)}\right)^2,$$

и утверждение следует из леммы, приведённой ниже. □

Лемма (7, лемма 5.60). *Пусть имеет место сходимость $\mu_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$ вероятностных мер на $\mathbb{R}$. Если $c = \sup\limits_N \int |f|^p d\mu_N < \infty$ для $p > 1$ и измеримой почти непрерывной функции f, то $\int f d\mu_N \to \int f d\mu$.*

Доказательство. Докажем для $f \geqslant 0$. Положим $f_k = f \wedge k$. Тогда $\int f d\mu_N = \int f_k d\mu_N + \int (f-k)^+ d\mu_N$. Первый интеграл сходится к $\int f_k d\mu$. Для второго слагаемого получаем:

$$\int (f-k)^+ d\mu_N \leqslant \int_{\{f>k\}} f d\mu_N \leqslant \int f^{p-1} f d\mu_N / k^{p-1} \leqslant c/k^{p-1}$$

равномерно по N. После этого можем записать:

$$\int f_k d\mu = \lim_{N\uparrow\infty} \int f_k d\mu_N \leqslant \liminf_{N\to\infty} \int f d\mu_N \leqslant \limsup_{N\to\infty} \int f d\mu_N \leqslant$$

$$\leqslant \int f_k d\mu + c/k^{p-1}.$$

Переходя к пределу $k \to \infty$, получаем требуемое. □

Проанализируем зависимость функции $v(x,t)$ (8.4) от переменных.

Упражнение 8.7. Найти частные производные функции из (8.4) и показать, что

$$\Delta(x,t) = v_x(x,t) = \Phi(s_+(x,t)), \quad \Gamma(x,t) = v_{xx}(x,t) = \phi(s_+(x,t))/(x\sigma\sqrt{t}),$$
$$\Theta(x,t) = v_t(x,t) = Kre^{-rt}\Phi(s_-(x,t)) + x\sigma\phi(s_+(x,t))/2/\sqrt{t}.$$

Воспользоваться тем, что $\phi(s_-(x,t))/\phi(s_+(x,t)) = xe^{rt}/K$. Здесь $\phi(x) = d\Phi(x)/dt$. Построить графики производных функций, используя стандартные функции нормального распределения в MatLab.

Найденные в упражнении 8.7 производные показывают, что $|v(x,t) - v(y,t)| \leqslant |x-y|$. Отсюда полная вариация цен опциона меньше, чем вариация цены актива. С другой стороны, ввиду строгой выпуклости $v(x,t)$ по t получаем:

$$\frac{v(z,t)-v(y,t)}{v(y,t)} > \frac{z-y}{y}, \quad \frac{v(x,t)-v(y,t)}{v(y,t)} < \frac{x-y}{y}, \ \text{если } x<y<z.$$

Следовательно, относительное изменение цен опционов больше относительного изменения цен активов.

Заметим, что параметры упражнения 8.7 связаны равенством $\Theta = rx\Delta + \sigma^2x^2\Gamma/2 - rv$. Отсюда получаем уравнение Блэка—Шоулса в частных производных:

$$v_t = rxv_x + \sigma^2x^2v_{xx}/2 - rv. \tag{8.5}$$

Поскольку $\lim_{t\to 0} v(x,t) = (x-K)^+$, мы видим, что функция (8.4) решает задачу Коши для уравнения (8.5). Этот вывод обобщается, а именно справедливо утверждение.

Утверждение 8.8. *Пусть $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $|f(x)| \leqslant c(1+x)^p$ при c, $p \geqslant 0$. Определим функцию*

$$u(x,t) = e^{-rt}\mathrm{E}^* f(d_t) = \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi}}\int f\left(xe^{\sigma\sqrt{t}y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

где $d_t = x\exp(\sigma W_t + rt - \sigma^2 t/2)$, W_t — нормальная величина $N(0,t)$ по мере P^*. Тогда $u(x,t)$ — решение уравнения Блэка — Шоулса (8.5) с начальным условием $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$, где сходимость локально равномерна по x.

Доказательство. Пусть $Y = \exp(\alpha + \sigma X)$ — логнормальная величина, тогда $P(Y \leqslant y) = \Phi((\log y - \alpha)/\sigma)$. Значит, плотность величины Y равна $\psi(y) = \phi((\log y - \alpha)/\sigma)/\sigma/yI_{(0,\infty)}(y)$. Применяя это для нашего случая, находим:

$$\mathrm{E}^* f(d_t) = \int_0^\infty \phi((\log(y/x) - (r - \sigma^2/2)t)/(\sigma\sqrt{t}))f(y)/(y\sigma\sqrt{t})dy.$$

Дифференцируя полученный интеграл по параметрам, получаем нужное уравнение. □

Цена Блэка — Шоулса $v(d_0, T)$ была получена как усреднение *дисконтированной выплаты* $e^{-rT}(d_T - K)^+$ по мартингальной мере P^*. Дифференцирование по параметру r даёт:

$$\rho(x,t) = v_r(x,t) = Kte^{-rt}\Phi(s_-(x,t)) > 0,$$

т. е. функция $v(x,t)$ возрастает по r. Но и сама мера P^* зависит от r, т. к. $\mathrm{E}^* e^{-rT} d_T = d_0$. В простой одношаговой модели в формуле (4.4) мы имели такой же эффект.

Параметр σ называется *волатильностью*. Введём функцию «вега»:

$$\mathcal{V}(x,t) = v_\sigma(x,t) = x\sqrt{t}\varphi(s_+(x,t)) > 0.$$

Поскольку она положительна, цена опциона растет вместе с его волатильностью.

Замечание 8.9. Все производные функции $v(x,t)$ могут быть найдены с помощью *символьных* вычислений MatLab.

Дадим некоторые комментарии по поводу полученных в главе результатов. Постоянную r считаем процентной ставкой безрискового банковского счёта $d_t^0 = e^{rt}$, $t \in [0,T]$. Цены рисковых активов в каждой модели с дискретным временем рассматриваем как непрерывный процесс $d_t^{(N)}$, полученный линейной интерполяцией между последовательными моментами через шаг T/N. По теореме 8.1 при каждом $t \in [0,T]$ величина $d_t^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{D}} d_t$, где

$$d_t = S_t = d_0 \exp(\sigma W_t + rt - \sigma^2 t/2) \tag{8.6}$$

и W_t имеет распределение $N(0,t)$. На самом деле сходимость имеет место в более сильном смысле. Будем рассматривать траекторию $d_\bullet^{(N)}$ как элемент пространства непрерывных функций $C[0,T]$. Тогда распределение элемента $d_\bullet^{(N)} \in C[0,T]$ на вероятностном пространстве $(\Omega_N, \mathcal{F}^{(N)}, P_N^*)$ слабо сходится к распределению элемента $d_\bullet = S_\bullet$, заданного формулой (8.6), на вероятностном пространстве $(C[0,T], \mathcal{B}_C, \mathbb{P})$ с мерой Винера $\mathbb{P}$. Здесь $\mathcal{B}_C$ — борелевская σ-алгебра на $C[0,T]$. В формуле (8.6) процесс $W_\bullet$ можно рассматривать как *стандартное броуновское движение*, или *винеровский процесс*. Эти факты доказываются с помощью теоремы [9, теорема V.6.8]. Мы ввели другое обозначение S_t для d_t, чтобы подчеркнуть функциональный характер зависимости именно от винеровского процесса, в то время как d_t имел логнормальное распределение для фиксированного момента t. Стандартный винеровский процесс обладает следующими свойствами:

- $W_0 = 0$ п.н.;
- траектории $t \to W_t$ непрерывны;
- приращения $\{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\}$ независимы в совокупности и нормальны $N(0, t_i - t_{i-1})$.

Пусть поток $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s,\ s \in [0,t])$ порождён винеровским процессом и $\mathbb{P}$ — винеровская мера на пространстве $(C[0,T], \mathcal{B}_C)$. Это каноническое пространство для винеровского процесса, причём $W_t(\omega) = \omega(t)$. Дисконтированный процесс цен

$$X_t = S_t/e^{rt} = S_0 e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2},\ t \in [0,T],$$

является $\mathbb{P}$-мартингалом, поскольку

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \mathbb{E} e^{\sigma(W_t - W_s) - \sigma^2(t-s)/2} = X_s.$$

Мера $\mathbb{P}$ является единственной эквивалентной мартингальной мерой с указанным свойством. Это влечёт полноту рынка, как в дискретном случае.

Опишем построение реплицирующей стратегии для европейского опциона с функцией выплат $f(S_T)$, например опциона покупки. В момент t цена акции равна S_t и дисконтированная цена опциона равна $V_t = e^{-rt} u(S_t, T-t)$, где u — функция, определённая в утверждении 8.8 при $d_t = S_t$. Процесс V_t можно рассматривать как процесс стоимости стратегии $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$, определённой равенством

$$\xi_t = \Delta(S_t, T-t) = u_x(S_t, T-t),\ \xi_t^0 = e^{-rt} u(S_t, T-t) - \xi_t X_t. \qquad (8.7)$$

В самом деле, если ξ_t — это число акций рискового актива S_t, а ξ_t^0 — число безрисковых облигаций $d_t^0 = e^{rt}$, то стоимость портфеля в единицах дисконтирующего актива равна $V_t = \xi_t X_t + \xi_t^0 = e^{-rt}(\xi_t S_t + \xi_t^0 d_t^0)$. Стратегия реплицирует опцион, т. к.

$$V_T = \lim_{t \to T} e^{-rt} u(S_t, T-t) = e^{-rT} f(S_T) = f(S_T)/d_T^0$$

в силу утверждения 8.8. Начальная стоимость такой стратегии определяется ценой Блэка — Шоулса:

$$V_0 = u(S_0, T) = e^{-rT} \mathbb{E} f(S_T) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int f\left(x e^{\sigma\sqrt{T} y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Стратегия самофинансируема в том смысле, что изменения стоимости портфеля происходят только от изменения цен первичных активов без дополнительных вложений. Чтобы это показать, используется формула Ито (см. [5, 6, 8, 9]):

$$dF(W_t, t) = F_x(W_t, t) dW_t + (F_t(W_t, t) + F_{xx}(W_t, t)/2) dt$$

для гладкой функции $F(x,t)$. Если положить $F(x,t) = \exp(\sigma x + rt - \sigma^2 t/2)$, то получаем стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + rS_t dt. \tag{8.8}$$

Отсюда инфинитезимальная норма прибыли dS_t/S_t равна сумме безрисковой нормы прибыли rdt и шума с нулевым средним. Влияние последнего измеряется параметром волатильности σ. Аналогично получаем:

$$dX_t = e^{-rt}(\sigma S_t dW_t + rS_t dt) - re^{-rt}S_t = \sigma X_t dW_t. \tag{8.9}$$

Применим формулу Ито к функции $F(x,t) = e^{-rt}u(S_0 \exp(\sigma x + rt - \sigma^2 t/2), T-t)$. Тогда

$$dV_t = e^{-rt}u_x(S_t, T-t)dS_t + e^{-rt}\left(\sigma^2 S_t^2 u_{xx}/2 - u_t - ru\right)dt.$$

В силу уравнения Блэка — Шоулса выражение в скобках равно $-rS_t u_x$. Таким образом, $dV_t = u_x(S_t, T-t)dX_t = \xi_t dX_t$, поскольку $dX_t = e^{-rt}(dS_t - rS_t)$. Интегрируя последнее уравнение, находим $V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s dX_s$. Поскольку интеграл Ито аппроксимируется суммами вида $\sum_{i=1}^N \xi_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$, то получаем аналог пункта в) утверждения 5.3. В этом смысле $\bar{\xi}_t = [\xi_t^0; \xi_t]$ — самофинансируемая стратегия для непрерывного времени. Также и равенство (5.4) имеет аналог $e^{rt}V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s dS_s + \int_0^t \xi_s^0 dd_s^0$.

Отметим, что в духе утверждения 8.8 можно исследовать и некоторые экзотические опционы, пользуясь слабой сходимостью.

8.2. Экзотические опционы и случайное блуждание

Вернёмся к биномиальному рынку, рассмотренному в пункте 5.6.1, и дополнительно предположим, что $\hat{a} = 1/\hat{b}$. Тогда, полагая $Y_t = (2R_t - b - a)/b - a)$ и $Z_t = \sum_{k=1}^t Y_k$, находим, что $d_t = d_0(1+b)^{Z_t}$. В качестве меры P берём равномерное распределение на Ω, предположив, что $P(\omega) = 1/2^T$. Следовательно, $P(Y_t = 1) = P(R_t = b) = 2^{T-1}/2^T = 0.5$. Поскольку величины Y_t и Y_s независимы при $t \neq s$, последовательность Z_t является *случайным блужданием.* Ясно, что $Z_t \in -t : 2 : t$ в обозначениях MatLab. Кроме того,

$$P(Z_t = k) = \begin{cases} C_t^{(t+k)/2}/2^t, & \text{если } t+k \text{ чётно,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{8.10}$$

Мы собираемся рассмотреть подробнее опционы, зависящие от максимума цены рискового актива. Введём величину $M_t = \max_{s \in 0:t} Z_s$.

Лемма 8.10 (принцип отражения). *Для чисел $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ выполняются равенства:*

$$P(M_T \geqslant k \text{ и } Z_T = k - l) = P(Z_T = k + l),$$

$$P(M_{T-1} = k \text{ и } Z_{T-1} = k - l) = 2\frac{k+l+1}{T} P(Z_T = 1 + k + l).$$

Доказательство. Определим момент остановки $\tau = \inf\{t \geqslant 0 : Z_t = k \wedge T$. В силу взаимно однозначного определения величин R_t через Y_t и обратно можем считать, что $\Omega = \{-1, 1\}^T$. Для $\omega = [y_1, \ldots, y_T] \in \Omega$ определим функцию

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } \tau(\omega) = T, \\ [y_1, \ldots, y_{\tau(\omega)}, -y_{\tau(\omega)+1}, \ldots, -y_T] & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Иллюстрацией отображения φ служит рис. 8.1. На рисунке $k = l = 1$, $\tau(\omega) = 3$. Пунктирная траектория получается путём отражения сплошной, относительно горизонтальной линии на уровне k.

Пусть $A_{k,l} = \{\omega : M_T \geqslant k \text{ и } Z_T = k - l\}$. Отображение φ осуществляет биекцию $A_{k,l}$ на множество $\{\omega : M_T \geqslant k \text{ и } Z_T = k + l\}$. Последнее совпадает с $\{\omega : \ Z_T = k + l\}$, откуда получаем первое равенство, поскольку распределение равномерно.

Для получения второй формулы заметим, что при $T - 1 + k + l = 2j - 1$ она справедлива, т. к. по формуле (8.10) и слева и справа будут нули. Если $T - 1 + k + l = 2j$, то используя первую формулу, находим:

$$\begin{gathered} P(M_{T-1} = k,\ Z_{T-1} = k - l) = P(M_{T-1} \geqslant k,\ Z_{T-1} = k - l) - \\ -P(M_{T-1} \geqslant k + 1,\ Z_{T-1} = k - l) = P(Z_{T-1} = k + l) - \\ -P(Z_{T-1} = k + l + 2) = C_{T-1}^{j}/2^{T-1} - C_{T-1}^{j+1}/2^{T-1} = \\ = 2^{-T+1} C_T^{j+1} \frac{2j - T + 2}{T} = 2\frac{k+l+1}{T} C_T^{T-j-1}/2^T. \end{gathered}$$

Последнее выражение совпадает с правой частью второй формулы. □

Заменим равномерное распределение P на мартингальную меру P^*. Формула (8.10) изменится на следующую ($q^* = 1 - p^*$):

$$P^*(Z_t = k) = \begin{cases} C_t^{(t+k)/2} (p^*)^{(t+k)/2} (q^*)^{(t-k)/2}, & \text{если } t + k \text{ чётно}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

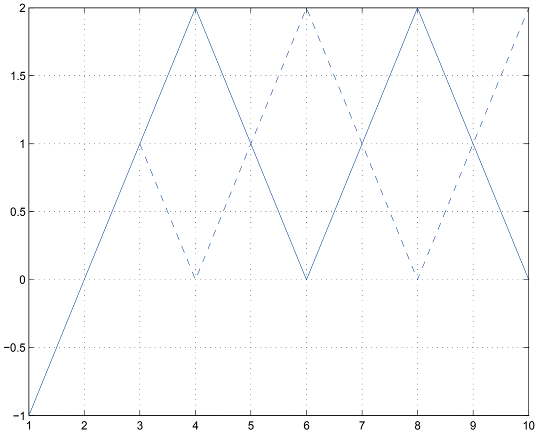

Рис. 8.1. Принцип отражения

Лемма 8.11 (принцип отражения для P^*). *Для чисел $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ выполняются равенства:*

$$P^*(M_T \geqslant k \text{ и } Z_T = k - l) = \left(\frac{q^*}{p^*}\right)^l P^*(Z_T = k + l) =$$
$$= \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k P^*(Z_T = -k - l),$$

$$P(M_{T-1} = k \text{ и } Z_{T-1} = k - l) = \left(\frac{q^*}{p^*}\right)^l \frac{k+l+1}{T} P(Z_T = 1 + k + l)/p^* =$$
$$= \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \frac{k+l+1}{T} P(Z_T = -1 - k - l)/q^*.$$

Доказательство. Плотность $dP^*/dP = 2^T (p^*)^{(T+Z_T)/2} (q^*)^{(T-Z_T)/2}$. Действительно, если в элементе ω ровно k единиц, то $P^*(\omega) = (p^*)^k (q^*)^{T-k}$. Для таких ω имеем $Z_T(\omega) = k - (T - k) = 2k - T$. Значит, вид плотности установлен. Далее можем вычислить:

$$P^*(M_T \geqslant k,\ Z_T = k-l) = 2^T (p^*)^{(T+k-l)/2} (q^*)^{(T-k+l)/2} P(M_T \geqslant k,\ Z_T = k-l).$$

По принципу отражения $P(M_T \geqslant k,\ Z_T = k - l) = P(Z_T = k + l)$. Заменяя последнюю вероятность через P^*, получаем первую формулу. Аналогично устанавливаются и остальные равенства. $\square$

Применим результаты к исследованию некоторых опционов.

Пример 8.12. Рассмотрим верхний call-опцион входа

$$C^{\text{call}}_{\text{u\&i}} = \begin{cases} (d_T - K)^+, & \text{если } \max\limits_{t\in 0:T} d_t \geqslant B, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $B > d_0 \vee K$ — заданный барьер. Этот опцион является функционалом от траектории $d_\bullet$. Мы хотим вычислить безарбитражную цену $\pi(C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}) = \mathrm{E}^* C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}/(1+r)^T$. Ясно, что

$$\mathrm{E}^* C^{\text{call}}_{\text{u\&i}} = \mathrm{E}^*((d_T - K)^+; \max_{t\in 0:T} d_t \geqslant B) =$$
$$= \mathrm{E}^*((d_T - K)^+; d_T \geqslant B) + \mathrm{E}^*((d_T - K)^+; \max_{t\in 0:T} d_t \geqslant B,\ d_T < B).$$

Не ограничивая общности, считаем, что барьер $B = d_0 \hat{b}^k$ для некоторого k. Обозначим второе усреднение через I. Имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{l\geqslant 1} \mathrm{E}^*((d_T - K)^+; M_T \geqslant k,\ Z_T = k - l) = \\ &= \sum_{l\geqslant 1} (d_0 \hat{b}^{k-l} - K)^+ P^*(M_T \geqslant k,\ Z_T = k - l) = \\ &= \sum_{l\geqslant 1} (d_0 \hat{b}^{k-l} - K)^+ \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k P^*(Z_T = -k - l) = \\ &= \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \hat{b}^{2k} \sum_{l\geqslant 1} (d_0 \hat{b}^{-k-l} - \tilde{K})^+ P^*(Z_T = -k - l) = \\ &= \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \left(\frac{B}{d_0}\right)^2 \mathrm{E}^*((d_T - \tilde{K})^+; d_T < \tilde{B}), \end{aligned}$$

где $\tilde{B} = d_0^2/B$, $\tilde{K} = K\hat{b}^{-2k} = K(d_0/B)^2$. Таким образом, справедлива формула

$$\pi\left(C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}\right) = \frac{1}{(1+r)^T}\Bigg(\mathrm{E}^*((d_T - K)^+; d_T \geqslant B) +$$
$$+ \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \left(\frac{B}{d_0}\right)^2 \mathrm{E}^*((d_T - \tilde{K})^+; d_T < \tilde{B})\Bigg).$$

Итак, цена опциона представлена как сумма усреднений от функций конечного состояния актива d_T. Используя биномиальное распределение, получаем явное выражение

$$\pi(C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}) = \frac{1}{(1+r)^T}\Biggl(\sum_{n=0}^{n_k}(d_0\hat{b}^{T-2n} - K)^+(p^*)^{T-n}(q^*)^n C_T^{T-n} + \\ + \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \left(\frac{B}{d_0}\right)^2 \sum_{n=n_k+1}^{T}(d_0\hat{b}^{T-2n} - \tilde{K})^+(p^*)^{T-n}(q^*)^n C_T^{T-n}\Biggr),$$

где n_k — наибольшее целое число n, для которого $T-2n \geqslant k$, т. е. $n_k = \lfloor (T-k)/2 \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое, не превосходящее числа x .

Упражнение 8.13. Рассмотреть верхний call-опцион выхода

$$C^{\text{call}}_{\text{u\&o}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \max\limits_{t\in 0:T} d_t \geqslant B, \\ (d_T - K)^+ & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $B > d_0 \vee K$ — верхний барьер цены акции. Как и выше, предположить, что $B = d_0\hat{b}^k$. Воспользовавшись тем, что $C^{\text{call}}_{\text{u\&o}} + C^{\text{call}}_{\text{u\&i}} = C^{\text{call}} = (d_T - K)^+$, найти безарбитражную цену $\pi(C^{\text{call}}_{\text{u\&o}}) = \mathrm{E}^* C^{\text{call}}_{\text{u\&o}}/(1+r)^T$.

Пример 8.14. Рассмотрим put-опцион с последействием

$$C^{\text{put}}_{\max} = \max_{t\in 0:T} d_t - d_T.$$

В рамках биномиального рынка цена опциона имеет вид

$$\pi(C^{\text{put}}_{\max}) = \mathrm{E}^* \max_{t\in 0:T} d_t/(1+r)^T - d_0.$$

Усреднение максимума представимо как

$$\mathrm{E}^* \max_{t\in 0:T} d_t = d_0 \sum_{k=0}^{T} \hat{b}^k P^*(M_T = k).$$

Из леммы 8.11 получаем цепочку равенств:

$$P^*(M_T = k) = \sum_{l\geqslant 0} P^*(M_T = k, Z_T = k - l) = \\ = \sum_{l\geqslant 0} \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \frac{k+l+1}{T+1} P^*(Z_{T+1} = -1-k-l)/q^* = \\ = \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \frac{1}{T+1} \mathrm{E}^*(-Z_{T+1}; Z_{T+1} \leqslant -1-k)/q^*.$$

Таким образом, справедлива формула

$$\pi(C^{\text{put}}_{\max}) + d_0 = \frac{d_0}{(1+r)^T q^*(T+1)} \sum_{k=0}^{T} \hat{b}^k \left(\frac{p^*}{q^*}\right)^k \mathrm{E}^*(-Z_{T+1}; Z_{T+1} \leqslant -1-k).$$

Здесь мы добавили значение Z_{T+1} для удобства. Усреднение в последней формуле вычисляется явно.

8.3. Аппроксимация цены непрерывного барьерного опциона

Из слабой сходимости на пространстве траекторий следует, что безарбитражные цены опционов $C(d^{(N)}_\bullet)$, вычисленные как дисконтированные средние по мере P^*_N, сходятся к дисконтированному среднему $e^{-rT}\mathbb{E}C(S_\bullet)$ по винеровской мере $\mathbb{P}$. Здесь $C(\cdot)$ — некоторый подходящий функционал. В то же время обсуждение экзотических опционов в предыдущей главе показывает, что цены некоторых обязательств, например барьерных опционов, вычисляются в явном виде. Оказывается, что они сходятся к цене типа Блэка — Шоулса и могут быть вычислены явно. Рассмотрим пример.

Пример 8.15. Рассмотрим непрерывный верхний call-опцион входа

$$C^{\text{call}}_{\text{u\&i}} = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{если } \max\limits_{t\in 0:T} S_t \geqslant B, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $B > S_0 \vee K$ — заданный барьер. Здесь t — непрерывное время. В качестве аппроксимации выбираем биномиальные рынки, где $r_N = rT/N$, а параметры a_N, b_N определяются равенствами

$$\hat{a}_N = 1 + a_N = e^{-\sigma\sqrt{T/N}},\ \hat{b}_N = 1 + b_N = e^{\sigma\sqrt{T/N}},\ \text{где } \sigma > 0.$$

Применяя формулу примера 8.12, имеем:

$$\pi\left(C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}\big(d^{(N)}_N\big)\right) = \frac{1}{(1+r_N)^T}\Big(\mathrm{E}^*_N\big((d^{(N)}_N - K)^+; d^{(N)}_N \geqslant B\big) +$$

$$+\left(\frac{p^*_N}{q^*_N}\right)^k_N \left(\frac{B_N}{d_0}\right)^2 \mathrm{E}^*_N\big((d^{(N)}_N - \tilde{K}_N)^+; d^{(N)}_N < \tilde{B}\big)\Big),$$

где $\tilde{B} = d_0^2/B$, $\tilde{K} = K\hat{b}^{-2k_N} = K(d_0/B_N)^2$. Здесь

$$k_N = \left\lceil \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{T}\sigma \log \frac{B}{d_0}} \right\rceil.$$

Символ $\lceil x \rceil$ означает наименьшее целое, большее числа x. Очевидно, что

$$B_N = d_0 e^{\sigma\sqrt{T/N}k_N} \searrow B,\ \tilde{K}_N \nearrow \tilde{K} = K\frac{d_0}{B}.$$

Теперь отметим, что функция $f(x) = (x-K)^+ I_{\{x \geqslant B\}}$ имеет одну точку разрыва, и из теоремы о сходимости в параграфе 8.1 после примера 8.4 получаем:

$$\mathrm{E}_N^*\big((d_N^{(N)} - K)^+; d_N^{(N)} \geqslant B\big) \to \mathbb{E}\big((S_T - K)^+; S_T \geqslant B\big).$$

Ввиду того, что $P_N^*(\tilde{K}_N \leqslant d_N^{(N)} \leqslant \tilde{K}) \to 0$, находим предел:

$$\mathrm{E}_N^*\big((d_N^{(N)} - \tilde{K}_N)^+; d_N^{(N)} < \tilde{B}\big) \to \mathbb{E}\big((S_T - \tilde{K})^+; S_T < \tilde{B}\big).$$

К тому же справедлива сходимость:

$$\left(\frac{p_N^*}{q_N^*}\right)_N^k \to \left(\frac{B}{d_0}\right)^{2r/\sigma^2 - 1}.$$

Таким образом, получаем сходимость

$$\frac{1}{(1+r_N)^T}\mathrm{E}_N^* C_{\text{u\&i}}^{\text{call}}\big(d_N^{(N)}\big) \to e^{-rT}\bigg(\mathbb{E}\big((S_T - K)^+; S_T \geqslant B\big) + \\ + \left(\frac{B}{d_0}\right)^{2r/\sigma^2+1} \mathbb{E}\big((S_T - \tilde{K})^+; S_T < \tilde{B}\big)\bigg).$$

Усреднения по логнормальному распределению здесь вычисляются явно, как в примере 8.4. Можно даже сказать больше, а именно функционал $C_{\text{u\&i}}^{\text{call}}(\cdot)$ почти непрерывен по винеровской мере $\mathbb{P}$. Значит, по функциональной версии сходимости имеем $\mathrm{E}_N^* C_{\text{u\&i}}^{\text{call}}\big(d_\bullet^{(N)}\big) \to \mathbb{E} C_{\text{u\&i}}^{\text{call}}(S_\bullet)$.

Упражнение 8.16. Исследовать зависимость дисконтированной цены барьерного опциона в примере 8.15 от параметров r, σ, а также K, B, построив соответствующие графики.

Упражнение 8.17. Пусть процесс цен равен $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \alpha t}$. Вывести с помощью формулы Ито стохастическое дифференциальное уравнение для S_t. Записать дисконтированный процесс цен X_t. Показать, что он зависит от винеровского процесса $W_t^* = W_t + \lambda t$ относительно меры $P^* \sim \mathbb{P}$ с плотностью $dP^*/d\mathbb{P} = e^{-\lambda W_T - \lambda^2 T/2}$. Найти число λ. Мера P^* — единственная эквивалентная мартингальная мера для X_t. Затраты на репликацию обязательства $C(S_\bullet)$ равны $e^{-rT}\mathrm{E}^* C(S_\bullet)$.

Упражнение 8.18. Рассмотреть непрерывный верхний call-опцион выхода

$$C_{\text{u\&o}}^{\text{call}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \max\limits_{t \in 0:T} S_t \geqslant B, \\ (S_T - K)^+ & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти его безарбитражную цену по аналогии с упражнением 8.13 и примером 8.15.

Глава 9

Основные приёмы работы в системе MatLab

Выше мы уже использовали некоторые команды MatLab в упражнениях. Ознакомимся с системой более подробно. Систематическое изложение системы MatLab можно найти в руководствах [13–15, 17, 18].Здесь мы приводим необходимые сведение для полноты изложения.

9.1. Командное окно

Система MatLab (сокращение от Matrix Laboratory) имеет давнюю историю и была разработана ещё для системы DOS, когда Windows и Lynux не существовали. Поэтому, видимо, в системе и сохранилось командное окно с приглашением $\gg$, после которого можно вводить команды. Например, введём команду $\gg$cos(pi/2). Ответ должен быть 0. Однако на экране мы видим

```
ans =
    6.1232e-17
```

То есть ответ записался в переменную ans ≈ 0. Это связано с алгоритмом вычисления встроенной функции cos. Для получения точного ответа надо набрать иную комбинацию:

```
>>cos(sym('pi/2'))
ans =
0
```

Здесь результат получается в символьном виде. Символьные числа выводятся на экран без отступа. Эти числа можно выводить с любой точностью с помощью команды vpa. Так, например, имеем

```
>>vpa('sqrt(2)',50)
ans =
1.41...
```

Всего будет выведено 50 значащих цифр. Ещё пример с гиперболическим тангенсом:

```
>>tanh(20)
ans =
    1
```

```
>>vpa('tanh(20)',20)
ans =
0.9...956
```

В символьном виде можно складывать рациональные числа:

```
>>sym('1/2')+sym('1/3')
ans = 5/6
```

Символьные числа можно переводить в обычные, и наоборот. Об этом можно прочитать в цитированных источниках. В MatLab имеется большой набор встроенных функций: sqrt, cos, sin, tan, log, exp, abs, atan, tanh, asin и т.д. О многих из них можно узнать, набрав $\gg$help. Сокращённые названия пишутся так, как принято в англоязычной литературе. Важно отметить, что все встроенные функции в качестве аргументов допускают не только числа, но и матрицы размера mxn. Результат получается поэлементно также в виде матрицы размера mxn. Можно вводить и комплексные матрицы. Результат также будет комплексным.

9.2. Символьные вычисления

Символьные вычисления в MatLab во многом заимствованы из системы Maple. Символьные переменные задаются перечислением

```
syms x y Z
```

Из символьных переменных и параметров можно составлять символьные выражения и функции, например $Z = \mathrm{atan}(x/y)$. Все зарезервированные функции и функции пользователя могут быть при этом задействованы. Определённые выражения могут вычисляться:

```
x=2.45; y=.3; eval(Z)
ans =
1.4489
```

Выражения могут интегрироваться и дифференцироваться по параметрам с помощью функций int и diff. Так, например, в упражнении 8.7 требовалось произвести ряд преобразований и дифференцирований. Примеры вычислений:

```
clear all, clc
syms x K r s t
sp=(log(x/K)+(r+s^2/2)*t)/s/sqrt(t);
sm=(log(x/K)+(r-s^2/2)*t)/s/sqrt(t);
p=normpdf(sm)/normpdf(sp);
simplify(p)
ans =
(x*exp(r*t))/K
diff(erfc(sp),x)
ans =
-(2*exp(-(log(x/K) + t*(s^2/2 + r))^2/(s^2*t)))/
(pi^(1/2)*s*t^(1/2)*x)
```

Здесь $erfc(x) = 2\int_x^\infty \exp(-t^2)dt/\sqrt{\pi}$.

9.3. Функции пользователя

Для написания программ и функций пользователя лучше всего воспользоваться внутренним редактором системы. Файлы сохраняются с расширением .m. Программы делятся на скрипты и функции. Программа-функция *обязательно начинается* с зарезервированного слова function «имя». Напомним, что имена регистрозависимые. Они не должны совпадать с зарезервированными словами. Программы-функции более удобны, они могут содержать в себе другие подпрограммы-функции и ссылки на них в одном m-файле, а скрипты не могут иметь подфункций и предназначаются для написания коротких программ. Допустим, надо создать функцию $y = x^3$. Есть два способа.

1-й способ. Используем зарезервированное слово и пишем, например:

```
f1=inline('x^3');
```

Начиная с 7-й версии MatLab предпочтительнее писать

```
f1=@(x)x^3;
```

Это внутренние функции. После определения функций их можно вызывать, вставив аргумент: f1(x).

2-й способ. В программе-функции определяем другую функцию

```
function y=f1(x)
y=x^3;
```

Такая функция является внешней по отношению к основной программе-функции и помещается в конце m-файла. Вызов её в основной программе происходит точно так же, как и вызов внутренних функций. Отметим, что символ ; подавляет вывод на экран. Этот знак *необходимо ставить* во многих случаях, иначе вывод больших массивов существенно замедлит работу программы.

9.4. Элементарная графика

Визуализация является обязательной частью моделирования. Познакомимся с тем, как можно нарисовать простейший график функции одной переменной. Задаём массив-сетку, например, $t = -5 : .01 : 5$;. Это равномерная сетка с шагом 0.01. Затем пишем команду plot(t,f1(t)). Однако получаем ошибку, поскольку в нашей функции в степень возводится только скаляр. Для возведения массива в функции надо написать команды

```
y=x.^3; grid,  print -depsc -r300 c:ris2
```

Теперь всё правильно, и мы получаем график, нанеся на него сетку.

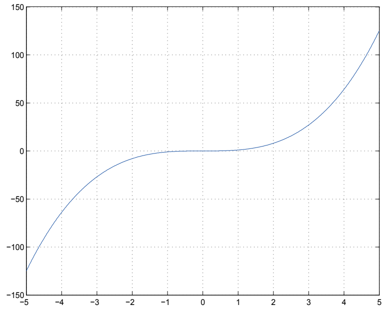

Рис. 9.1.

При этом надо вставить файл с диска C: в наш текст. Как видно, масштаб по осям выбирается автоматически. Так график выглядит лучше с точки зрения MatLab. Но это можно отменить, о чём будет сказано далее. Другой способ получить тот же график: fplot(f1,[-5 5]). Этот способ несколько проще, поскольку сетка выбирается автоматически. К тому же ставить точку перед знаком возведения в степень необязательно. Есть ещё и третий способ: ezplot(f1,[-5 5]). В нём оси подписываются, и график имеет заголовок. С помощью ezplot нетрудно изобразить и параметрические кривые. Допустим, надо нарисовать стандартный эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Полагаем $x = a * \cos(t)$, $y = b * \sin(t)$. Вводим команду ezplot('3$*\cos(t)$','2$*\sin(t)$', [-pi pi]) для случая $a = 3$, $b = 2$, или plot(a$*\cos(t)$, b$*\sin(t)$), когда переменным a, b уже присвоены значения и t — некоторая сетка на отрезке [-pi,pi].

Перейдём к построению пространственных графиков. Функция ezplot3 рисует пространственные параметрические кривые. Например, один виток винтовой линии можно нарисовать с помощью ezplot3('cos(t)','sin(t)', '2$*t$', [0 $2 * pi$]). Параметрические поверхности рисуются с помощью функций ezmesh или ezsurf. Попробуем нарисовать стандартный эллипсоид x^2/a^2+ $+y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Полагаем

$$x = a * \cos(t) * (1 - z^2/c^2)^{1/2}, \quad x = b * \sin(t) * (1 - z^2/c^2)^{1/2}.$$

Для случая $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, вводим команду

```
ezmesh('3*(1-z^2)^(1/2)*cos(t)','2*(1-z^2)^(1/2)*sin(t)','z',
[0 2*pi -1 1])
```

или ezsurf с теми же аргументами. В некоторых случаях сетку для рисования полезно заготовить самостоятельно. Используем команды meshgrid, mesh или surf:

```
T=0:.01:2*pi;  Z=-c:.01:c; [T Z]=meshgrid(T,Z);
mesh(a*(1-Z.^2).^(1/2).*cos(T),b*(1-Z.^2).^(1/2).*sin(T),Z)
```

Эллипс или эллипсоид, произвольно повернутые в пространстве, задаются уравнением $(x-x_0)'P(x-x_0) = 1$, где x_0 — центр фигуры, а P — симметрическая матрица со свойствами $P' = P > 0$. Для изображения произвольных эллипсов и эллипсоидов весьма полезна функция eig. Она вычисляет собственные числа и собственные векторы матриц. В частности, если матрица P симетрическая, то команда

```
[U,V]=eig(P), где U=[h_1,...,h_n], V=diag(\lambda_1,...,
\lambda_n),
```

даёт все собственные числа (действительные, так как матрица симметрическая) и все собственные векторы.

Список библиографических ссылок

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989. 735 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1968. 440 с. Т. 2. М.: Наука, 1964. 463 с.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 432 с.
4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Институт компьютерных исследований, 2004. 271 с.
5. Ширяев А.Н. Вероятность — 1,2. В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2004.
6. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, факты, модели. Т. 2, теория. М.: Фазис, 1998.
7. Фёльмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦННО, 2008. 496 с.
8. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
9. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
10. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2001.
11. Малыхин В.И. Финансовая математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
13. Дьяконов В.П. MatLab R2006/2007/2008 +Simulink. Основы применения. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008.
14. Потемкин В.Г. Вычисления в MatLab. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2004.
15. Чен К., Джиблин П., Ирвинг А. MatLab в математических исследованиях. М.: Мир, 2001.
16. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. М.: Высшая школа, 2001.
17. Поршнев С.В. MatLab 7. М.: БИНОМ, 2006.
18. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MatLab. М.: Горячая Линия-Телеком, 2003. 592 с.
19. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. М.: УРССС, 2004. 149 с.
20. Васин В.В., Ряшко Л.Б. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006.
21. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.
22. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983. 331 с.

Приложение

Задания для курсовой работы

Цели и задачи курсовой работы. Целью выполнения курсовой работы является изучение и применение к конкретной задаче изложенных в пособии методов анализа финансовых рынков и платёжных обязательств.

В процессе решения задачи студенты знакомятся с терминологией, значительно повышают уровень знаний по теории вероятностей и теории случайных процессов с дискретным временем, а также приобретают навыки использования абстрактных методов теории меры теории мартингалов при решении финансовых задач.

Составными элементами исследования, проводимого студентами, является построение математической модели задачи, её исследование, визуализация результатов, если это возможно, применение численных методов, если точное решение невозможно, а также формулировка выводов. Для численных расчётов рекомендуется использовать MatLab, но это не является обязательным условием.

Таким образом, студенты получают навык решения задач от формальной постановки до получения теоретических результатов, их анализа и вычислительных результатов.

Требования к содержанию и оформлению пояснительной записки к курсовой работе

1. Титульный лист.
2. Оглавление.
3. Формулировка задания.
4. Введение и обзор литературы.
5. Математическая постановка задачи. В этом разделе обсуждаются особенности задачи и параметры (переменные). Объясняется отличие или схожесть задачи с примерами, упражнениями и указаниями данного пособия. Строго формулируются утверждения, требующие доказательства.
6. Подробные доказательства.
7. Визуализация результатов и численные эксперименты.
8. Выводы.
9. Список использованной литературы.
10. Приложения, если они есть (распечатки текстов программ, описание вычислительных экспериментов).

Задача 1. Исследовать построение оптимальных портфелей Тобина в случае вырожденной матрицы $\mathcal{V}$. Саму матрицу формировать как в примере 2.9, с теми же параметрами, но последнее собственное число λ_n положить равным нулю. Не учитывать неотрицательность долей вложения. Будет ли решение обеих задач единственным? Возможен ли случай, когда решений нет? Привести примеры исходных данных, когда требуются операции short-sale и когда они не требуются. Графически изобразить оптимальные решения в зависимости от параметров.

Задача 2. Исследовать построение оптимальных портфелей Тобина в случае вырожденной матрицы $\mathcal{V}$ и при учёте неотрицательности долей вложения. Саму матрицу формировать как в примере 2.9, с теми же параметрами, но два последних собственных числа положить равными нулю. Будет ли решение обеих задач единственным? Возможен ли случай, когда решений нет? Дать визуализацию сравнения данного варианта со случаем предыдущей задачи.

Задача 3. Сформировать независимым образом векторы a, b при $n = 10$ из равномерного распределения на $[0, 10]$. В качестве ведущего фактора f взять нормальное распределение со средним $m_f = 5$ и единичной дисперсией. Величины e_i считать нормальными с нулевым средним и дисперсией 0.1. Подобно предыдущим задачам исследовать 1-ю и 2-ю задачи Марковица в зависимости от ведущего фактора. Дать визуализацию сравнения решений при учёте неотрицательности долей вложения и без него. Как будет выглядеть решение при наличии нулевых собственных вариаций?

Задача 4. Пусть на одношаговом рынке множество $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ конечно, $N \geqslant 2$. Полагаем $P(\omega_i) = p_i > 0$ для всех $i \in 1 : N$. Рассмотрим n случайных активов $d_k \geqslant 0$ с начальной ценой $\pi_k > 0$, $k \in 1 : n$, в момент $t = 1$. Используя теорему 3.5 о безарбитражности, выписать уравнения для определения безарбитражных вероятностей p_i^*. Сформулировать условия, при которых решение существует и единственно. Сравнить с примером 3.10. Доказать, что решение не зависит от исходной меры P.

Задача 5. Исследовать специальные европейские платёжные обязательства на биномиальном рынке. Дать определение и указать свойства биномиального рынка. Доказать частный случай утверждения 5.42, когда дисконтированное обязательство имеет вид $H = h(d_T, M_T)$, где $M_t = \max_{s \in 0:t} d_s$. С помощью формулы (5.21) показать, что процесс стоимости $V_t = v_t(d_t, M_t)$. Найти вид функции $v_t(x_t, m_t)$. Применить результаты к барьерным опционам.

Задача 6. Рассмотреть триномиальную модель с единственным рисковым активом, для которого норма прибыли $R_t \in \{a, 0, b\}$, причём $-1 < a < 0 < b$. Безрисковая облигация $d_t^0 = (1+r)^t$, где $r > -1$. По аналогии с биномиальным рынком ввести подходящее вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с условием $P(\{\omega\}) > 0$ для исходной меры. Вывести соотношения, которым должна удовлетворять мартингальная мера Q, и охарактеризовать множество $\mathcal{M}(P)$. Убедиться в том, что полученный рынок будет неполным. Найти множество $\Pi(H)$ из теорем 5.33 и 5.36 для европейского дисконтированного обязательства. Подсчитать безарбитражные цены call и put-опционов.

Предметный указатель

Учебное издание

Ананьев Борис Иванович
Гредасова Надежда Викторовна

МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор В. О. Корионова
Корректор А. А. Трофимова
Верстка Б. И. Ананьева

Подписано в печать 29.08.2019. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 8,71.
Уч.-изд. л. 7,03. Тираж 40 экз. Заказ 168.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

9 785799 626372

АНАНЬЕВ БОРИС ИВАНОВИЧ

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» Уральского энергетического института Уральского федерального университета.

Область научных интересов: теория оптимального управления и наблюдения, управление в условиях неопределенности, численные методы теории управления, задачи коррекции движения управляемых систем, финансовая математика.

ГРЕДАСОВА НАДЕЖДА ВИКТОРОВНА

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Уральского энергетического института Уральского федерального университета.

Область научных интересов: теория оптимального управления и наблюдения, электронное обучение.